Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

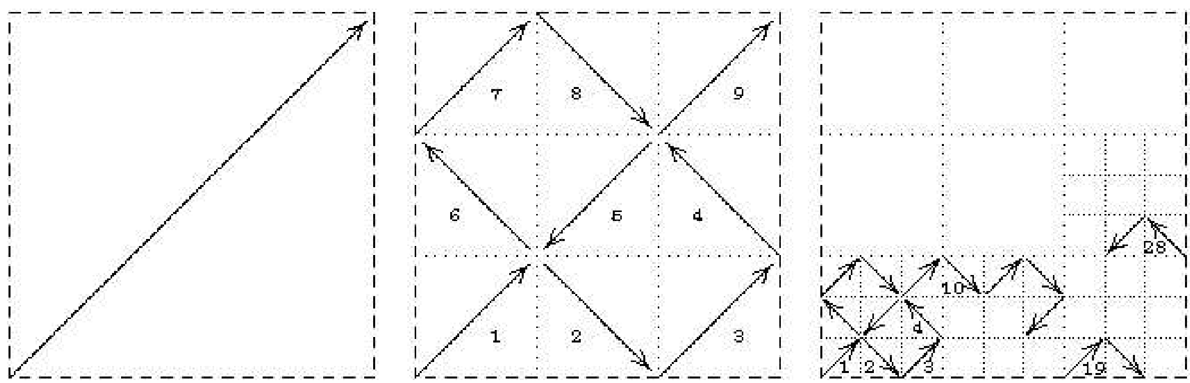
11. Juni 2007

Analysis II
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 (Konstruktion einer Peano-Kurve) Wir definieren stetige, stückweise lineare Abbildungen $f_n\colon I \longrightarrow I \times I$, $I = [0,1]$ mit $f_n(0) = (0,0)$ und $f_n(1) = (1,1)$ auf folgende Weise:

$$f_0(x) = (x,x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Um f_1 zu definieren, werde I in 9 gleich lange Strecken geteilt, also in die Teilintervalle $[\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9}]$ mit $1 \leq i \leq 9$. Entsprechend wird $I \times I$ in 9 gleich große Quadrate geteilt. Diese Quadrate werden geeignet durchnummeriert (siehe das Bild $n = 1$), und das i-te Intervall $[\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9}]$ wird nun unter f_1 in das i-te Quadrat abgebildet, und zwar werden die einzelnen Teilintervalle jeweils auf Diagonalen abgebildet. Um f_2 zu definieren, werde I in 9^2 gleich lange Strecken geteilt. Entsprechend wird $I \times I$ in 9^2 gleich große Quadrate geteilt. Die Nummerierung erfolgt wie im Bild $n = 2$ angedeutet (Man läuft innerhalb der 9 Teilquadrate des Schritts $n = 1$ jeweils erst horizontal, dann vertikal.), und unter f_2 wird wieder das i-te Intervall in eine Diagonale des i-ten Quadrats abgebildet. Allgemein: Um f_n zu definieren, werde I in 9^n gleich lange Strecken geteilt; entsprechend wird $I \times I$ in 9^n gleich große Quadrate geteilt. Die Nummerierung der Quadrate erfolgt induktiv. Man läuft jeweils erst horizontal, dann vertikal. Unter f_n wird das i-te Intervall in eine Diagonale des i-ten Quadrats abgebildet.



n=0 n=1 n=2

Zeigen Sie, dass die Funkionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion f konvergiert, welche stetig und surjektiv, nicht aber injektiv ist.

Aufgabe 9.2 Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge mit $I \cap M \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $I \subset \mathring{M}$ oder $I \cap \partial M \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 9.3 Für achsenparallele Rechtecke $R = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$, wobei I_1 und I_2 beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$ seien, sei eine nichtnegative reellwertige Funktion μ erklärt, die folgenden Bedingungen genüge:

(i) Ist R disjunkt in R_1 und R_2 zerlegt, so gilt: $\mu(R) = \mu(R_1) + \mu(R_2)$.

(ii) Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ gilt $\mu(v + R) = \mu(R)$.

(iii) $\mu([0,1] \times [0,1]) = 1$.

Zeigen Sie:

(a) $\mu([a_1, b_1) \times [a_2, b_2]) = \mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$ (d.h. entartete Rechtecke wie beispielsweise $[b_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ haben den „Inhalt“ Null).

(b) $\mu([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$.
HINWEIS: Für $x \geq 0$ betrachte $f(x) := \mu([0, x] \times [0, 1])$ und zeige $f(x) = x$. Wähle dabei zunächst $x \in \mathbb{Q}$.

Abgabetermin: Montag 18. Juni 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.