Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

7. Januar 2008

Analysis III
10. Übungsblatt

Definition 10.1 *Ein äußeres Maß $\tilde{\mu}$ auf einem metrischen Raum (X, d) heißt metrisches äußeres Maß, falls für beliebige Mengen $A, B \subset X$ mit $\inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\} > 0$ gilt $\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$.*

Aufgabe 10.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\tilde{\mu}$ ein äußeres Maß auf X, so dass jede offene Menge $\tilde{\mu}$-messbar ist. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ dann ein metrisches äußeres Maß ist.

Aufgabe 10.3 Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und seien μ, ν zwei Maße auf $\mathcal{A}$. Wenn für $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) = 0$ schon $\nu(A) = 0$ folgt, so nennen wir ν absolutstetig bezüglich μ und schreiben $\nu \ll \mu$. Es gelte nun $\nu(X) < \infty$. Zeigen Sie

$$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall A \in \mathcal{A} : (\mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon)$$

Hinweis: Bei „$\Rightarrow$“ bietet sich ein Widerspruchsbeweis an.

Aufgabe 10.4 Es sei μ ein endlicher, σ-additiver Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A}$ und μ^* das zu μ gehörige äußere Maß. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir weiter

$$d_{\mu^*}(A, B) := \mu^*(A \Delta B),$$

hierbei ist $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die „symmetrische Differenz“ von A und B. Zeigen Sie: Für das Mengensystem $\overline{\sigma}(\mathcal{A})$ aller μ^*-meßbaren Mengen gilt

$$\overline{\sigma}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mathcal{P}(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} : d_{\mu^*}(A, B) < \varepsilon\}.$$

Abgabetermin: Montag 14. Januar 2008, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.