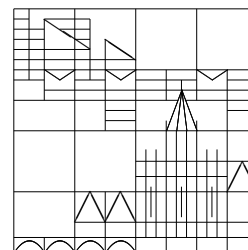


Universität Konstanz  
Fachbereich Mathematik und Statistik  
PROF. DR. REINHARD RACKE  
DIPL.-MATH. OLAF WEINMANN

7. Januar 2008



### Analysis III 10. Übungsblatt

**Definition 10.1** Ein äußeres Maß  $\tilde{\mu}$  auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt metrisches äußeres Maß, falls für beliebige Mengen  $A, B \subset X$  mit  $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$  gilt  $\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$ .

**Aufgabe 10.2** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $\tilde{\mu}$  ein äußeres Maß auf  $X$ , so dass jede offene Menge  $\tilde{\mu}$ -messbar ist. Zeigen Sie, dass  $\tilde{\mu}$  dann ein metrisches äußeres Maß ist.

**Aufgabe 10.3** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum und seien  $\mu, \nu$  zwei Maße auf  $\mathcal{A}$ . Wenn für  $A \in \mathcal{A}$  aus  $\mu(A) = 0$  schon  $\nu(A) = 0$  folgt, so nennen wir  $\nu$  absolutstetig bezüglich  $\mu$  und schreiben  $\nu \ll \mu$ . Es gelte nun  $\nu(X) < \infty$ . Zeigen Sie

$$\nu \ll \mu \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{A} : (\mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon)$$

HINWEIS: Bei „ $\implies$ “ bietet sich ein Widerspruchsbeweis an.

**Aufgabe 10.4** Es sei  $\mu$  ein endlicher,  $\sigma$ -additiver Inhalt auf einer Algebra  $\mathcal{A}$  und  $\mu^*$  das zu  $\mu$  gehörige äußere Maß. Für  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  definieren wir weiter

$$d_{\mu^*}(A, B) := \mu^*(A \Delta B),$$

hierbei ist  $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  die „symmetrische Differenz“ von  $A$  und  $B$ . Zeigen Sie: Für das Mengensystem  $\bar{\sigma}(\mathcal{A})$  aller  $\mu^*$ -meßbaren Mengen gilt

$$\bar{\sigma}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mathcal{P}(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} : d_{\mu^*}(A, B) < \varepsilon\}.$$