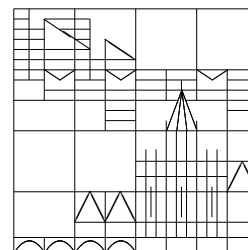


14. Januar 2008



Analysis III 11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Sind \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 beliebige σ -Algebren über Y , so gilt $f^{-1}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = f^{-1}(\mathcal{A}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.
- (ii) Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ gegeben, so gilt:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}}} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Aufgabe 11.2 Für $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $(-\infty, b] := (-\infty, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_n]$. Damit seien

$$\begin{aligned} J_1 &:= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^n\}, & J_2 &:= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^n\}, \\ J_3 &:= \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}^n\}, & J_4 &:= \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}^n\}, \\ J_5 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen}\}, & J_6 &:= \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt}\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass J_1 bis J_6 jeweils die σ -Algebra der Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen.

HINWEIS: Zeigen Sie: $J_1 \subset \sigma(J_2), \dots, J_5 \subset \sigma(J_6)$ sowie $J_6 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 11.3 Wir setzen $\overline{\mathbb{R}}^n := (\overline{\mathbb{R}})^n$ und definieren die Borel- σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}^n$ durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma(\{(a, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}^n : a \in \mathbb{R}^n\})$$

Aufgabe 11.4 Es sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum und $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbare Abbildungen. Ferner sei die Abbildung $F: \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ -messbar. Zeigen Sie: $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) := F(f_1(x), \dots, f_n(x))$, ($x \in X$) ist \mathcal{A} -messbar.