Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

14. Januar 2008

Analysis III
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ beliebige $\sigma-$Algebren über Y, so gilt $f^{-1}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = f^{-1}(\mathcal{A}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.

(ii) Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ gegeben, so gilt:

$$f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E})\right) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma-Algebra \\ \mathcal{E}\subset\mathcal{A}}} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Aufgabe 11.2 Für $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $(-\infty, b] := (-\infty, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_n]$. Damit seien

$$\begin{aligned} J_1 &:= \big\{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{R}^n\big\}, & J_2 &:= \big\{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{Q}^n\big\}, \\ J_3 &:= \big\{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}^n\big\}, & J_4 &:= \big\{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{Q}^n\big\}, \\ J_5 &:= \big\{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen}\big\}, & J_6 &:= \big\{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt}\big\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass J_1 bis J_6 jeweils die σ-Algebra der Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen.
Hinweis: Zeigen Sie: $J_1 \subset \sigma(J_2), \ldots, J_5 \subset \sigma(J_6)$ sowie $J_6 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 11.3 *Wir setzen $\overline{\mathbb{R}}^n := \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$ und definieren die Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}^n$ durch*

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma\left(\{(a,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}^n : a \in \mathbb{R}^n\}\right)$$

Aufgabe 11.4 Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f_1, \ldots, f_n\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}-$meßbare Abbildungen. Ferner sei die Abbildung $F\colon \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)-$meßbar. Zeigen Sie: $h\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) := F(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $(x \in X)$ ist $\mathcal{A}$-meßbar.

Abgabetermin: Montag 21. Januar 2008, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.