Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

21. Januar 2008

Analysis III
12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Ferner sei $\alpha \in [0,1)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $E \subset U$ und $\alpha\lambda(U) \leq \lambda(E)$.

(ii) Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $\alpha\lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$ gilt.

Hinweis: Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, so dass $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gilt. Diese Aussage dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 12.2 Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Zeigen Sie, dass ein $b > 0$ existiert, so dass $(-b, b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 12.1: Setzen Sie $\alpha := \frac{3}{4}$ und beweisen Sie dann, dass $\big(-\frac{1}{2}\lambda(I), \frac{1}{2}\lambda(I)\big) \subset E - E$ gilt. Schätzen Sie hierzu $\lambda\big((E \cap I) \cup (x + E \cap I)\big)$ geeignet ab.

Aufgabe 12.3 Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Zeigen Sie: Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist die Funktion $\chi_A \cdot f$ messbar.

Abgabetermin: Montag 28. Januar 2008, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.