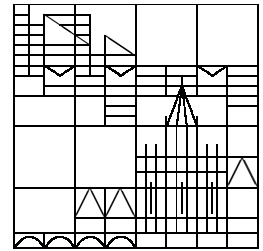


Universität Konstanz  
Fachbereich Mathematik und Statistik  
PROF. DR. REINHARD RACKE  
DIPL.-MATH. OLAF WEINMANN

21. Januar 2008



### Analysis III 12. Übungsblatt

**Aufgabe 12.1** Sei  $E \subset \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar und beschränkt mit  $0 < \lambda(E)$ . Ferner sei  $\alpha \in [0, 1)$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}$  mit  $E \subset U$  und  $\alpha\lambda(U) \leq \lambda(E)$ .
- (ii) Es existiert ein offenes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , so dass  $\alpha\lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$  gilt.

HINWEIS: Für jede offene Menge  $U \subset \mathbb{R}$  existiert eine Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise disjunkten offenen Intervallen in  $\mathbb{R}$ , so dass  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$  gilt. Diese Aussage dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

**Aufgabe 12.2** Sei  $E \subset \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar und beschränkt mit  $0 < \lambda(E)$ . Zeigen Sie, dass ein  $b > 0$  existiert, so dass  $(-b, b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}$  gilt.

HINWEIS: Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 12.1: Setzen Sie  $\alpha := \frac{3}{4}$  und beweisen Sie dann, dass  $(-\frac{1}{2}\lambda(I), \frac{1}{2}\lambda(I)) \subset E - E$  gilt. Schätzen Sie hierzu  $\lambda((E \cap I) \cup (x + E \cap I))$  geeignet ab.

**Aufgabe 12.3** Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Zeigen Sie: Für jedes  $A \in \mathcal{A}$  ist die Funktion  $\chi_A \cdot f$  messbar.