Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

28. Januar 2008

Analysis III
13. Übungsblatt

Aufgabe 13.1 Es sei $(X, \mathcal{C})$ ein Messraum. Ferner seien $f_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$$

messbar ist.

Definition 13.2 *Es sei $y \in \mathbb{R}$ und $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Intervall $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar. Existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{c\to -\infty+} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t$$

und

$$\lim_{c\to \infty-} \int_y^c f(t)\mathrm{d}t$$

so definiert man das uneigentliche (Riemann-) Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t := \lim_{c\to -\infty+} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t + \lim_{c\to \infty-} \int_y^c f(t)\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 13.3 Eine auf $\mathbb{R}$ definierte, messbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ sei auf jedem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}$, wenn das uneigentliche Riemann-Integral existiert. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda.$$

Aufgabe 13.4 Zeigen Sie mit Hilfsmitteln der Analysis III:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathrm{d}\lambda(x) = 1.$$

Abgabetermin: Montag 4. Februar 2008, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.