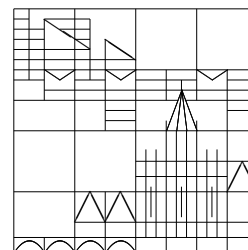


28. Januar 2008



### Analysis III 13. Übungsblatt

**Aufgabe 13.1** Es sei  $(X, \mathcal{C})$  ein Messraum. Ferner seien  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(n \in \mathbb{N})$  messbare Funktionen. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$$

messbar ist.

**Definition 13.2** Es sei  $y \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem Intervall  $[a, b]$  mit  $-\infty < a < b < \infty$  Riemann-integrierbar. Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{c \rightarrow -\infty+} \int_c^y f(t) dt$$

und

$$\lim_{c \rightarrow \infty-} \int_y^c f(t) dt$$

so definiert man das uneigentliche (Riemann-) Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{c \rightarrow -\infty+} \int_c^y f(t) dt + \lim_{c \rightarrow \infty-} \int_y^c f(t) dt.$$

**Aufgabe 13.3** Eine auf  $\mathbb{R}$  definierte, messbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  sei auf jedem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar. Zeigen Sie:  $f$  ist genau dann Lebesgue-integrierbar über  $\mathbb{R}$ , wenn das uneigentliche Riemann-Integral existiert. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

**Aufgabe 13.4** Zeigen Sie mit Hilfsmitteln der Analysis III:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} d\lambda(x) = 1.$$