Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

29. Oktober 2007

# Analysis III
## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Es sei $h > 0$, $S := [0, h] \times \mathbb{R}^n$ und $f \colon S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Ferner genüge $f$ in $S$ der Abschätzung

$$|t||f(t,x) - f(t,y)| \leq |x - y|.$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

$$x(0) = x_0$$

unter diesen Voraussetzungen höchstens eine Lösung besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Funktion

$$D(t) := \begin{cases} \frac{|x(t)-y(t)|}{t} & \text{für} \quad 0 < t \leq h, \\ 0 & \text{für} \quad t = 0, \end{cases}$$

wobei $x$ und $y$ Lösungen des Anfangswertproblems sind, stetig in $[0, h]$ ist. Folgern Sie die Existenz eines Maximums $D(t^*)$ und vergleichen Sie dieses mit $\frac{1}{t^*}\int_0^{t^*} D(t)\mathrm{d}t$.

**Aufgabe 2.2** Für jedes $c > 0$ wird durch die Gleichung $y^2 + 2x^2 = c^2$ im $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse beschrieben. Variiert man $c$, so erhält man also eine Schar von Ellipsen. Bestimmen Sie eine Schar von Kurven, die die Eigenschaft haben, dass sie jede dieser Ellipsen rechtwinklig schneiden.

**Aufgabe 2.3** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x' = 3 + x^2.$$

Hinweis: Führen Sie die gegebene Differentialgleichung auf die Gleichung

$$x' = 1 + x^2$$

zurück.

Abgabetermin: Montag 5. November 2007, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.