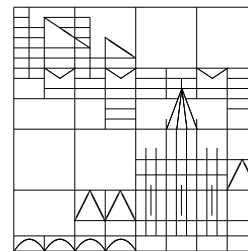


29. Oktober 2007



Analysis III 2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Es sei $h > 0$, $S := [0, h] \times \mathbb{R}^n$ und $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Ferner genüge f in S der Abschätzung

$$|t| |f(t, x) - f(t, y)| \leq |x - y|.$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)), \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

unter diesen Voraussetzungen höchstens eine Lösung besitzt.

HINWEIS: Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Funktion

$$D(t) := \begin{cases} \frac{|x(t) - y(t)|}{t} & \text{für } 0 < t \leq h, \\ 0 & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

wobei x und y Lösungen des Anfangswertproblems sind, stetig in $[0, h]$ ist. Folgern Sie die Existenz eines Maximums $D(t^*)$ und vergleichen Sie dieses mit $\frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} D(t) dt$.

Aufgabe 2.2 Für jedes $c > 0$ wird durch die Gleichung $y^2 + 2x^2 = c^2$ im \mathbb{R}^2 eine Ellipse beschrieben. Variiert man c , so erhält man also eine Schar von Ellipsen. Bestimmen Sie eine Schar von Kurven, die die Eigenschaft haben, dass sie jede dieser Ellipsen rechtwinklig schneiden.

Aufgabe 2.3 Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x' = 3 + x^2.$$

HINWEIS: Führen Sie die gegebene Differentialgleichung auf die Gleichung

$$x' = 1 + x^2$$

zurück.