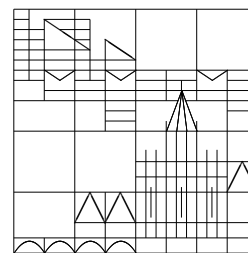


05. November 2007



### Analysis III 3. Übungsblatt

**Aufgabe 3.1** An einem heißen Sommertag zeigt das Thermometer in einem klimatisierten Raum  $20^\circ C$ . Bringt man das Thermometer nach außen, so zeigt es nach 5 Minuten  $25^\circ C$  und nach 10 Minuten  $27^\circ C$ . Reichen diese Messwerte bereits aus, um mit Hilfe eines linearen Differentialgleichungsmodells die genaue Außentemperatur berechnen zu können?

**Aufgabe 3.2** Es sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix mit reellen, konstanten Koeffizienten.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

in der Operatornorm

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$t \mapsto e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

differenzierbar ist und dass die Funktion

$$z(t) := e^{tA} z_0$$

das Anfangswertproblem

$$z' = Az, \quad z(0) = z_0$$

löst.

**Aufgabe 3.3** Im Falle einer nicht exakten Differentialgleichung

$$f(x, y, y') := g(x, y) + h(x, y)y' = 0$$

kann man versuchen, einen sogenannten Eulerschen Multiplikator  $M = M(x, y)$  dergestalt zu finden, dass

$$M(x, y)f(x, y, y') = 0$$

eine exakte Differentialgleichung darstellt. Im Allgemeinen muss man zur Bestimmung von  $M$  eine partielle Differentialgleichung lösen. Einfacher verhält es sich, wenn Eulersche Multiplikatoren existieren, die nur von einer der beiden Variablen  $x$  oder  $y$  abhängen. In diesem Fall erhält man  $M$  als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

(i) Wie lautet die partielle Differentialgleichung, der  $M = M(x, y)$  genügen muss?

(ii) Zeigen Sie, dass

$$f(x, y, y') := [\sin x - x \cos x - 3x^2(y - x)^2] + 3x^2(y - x)^2y' = 0$$

nicht exakt ist.

(iii) Zeigen Sie, dass ein Eulerscher Multiplikator  $M = M(x)$  so existiert, dass

$$(1) \quad M(x)f(x, y, y') = 0$$

exakt ist.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung (1).