Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

05. November 2007

Analysis III
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 An einem heißen Sommertag zeigt das Thermometer in einem klimatisierten Raum $20°C$. Bringt man das Thermometer nach außen, so zeigt es nach 5 Minuten $25°C$ und nach 10 Minuten $27°C$. Reichen diese Messwerte bereits aus, um mit Hilfe eines linearen Differentialgleichungsmodells die genaue Außentemperatur berechnen zu können?

Aufgabe 3.2 Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit reellen, konstanten Koeffizienten.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

in der Operatornorm

$$|||A||| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$t \longmapsto e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

differenzierbar ist und dass die Funktion

$$z(t) := e^{tA} z_0$$

das Anfangswertproblem

$$z' = Az, \quad z(0) = z_0$$

löst.

Aufgabe 3.3 Im Falle einer nicht exakten Differentialgleichung

$$f(x,y,y') := g(x,y) + h(x,y)y' = 0$$

kann man versuchen, einen sogenannten Eulerschen Multiplikator $M = M(x,y)$ dergestalt zu finden, dass

$$M(x,y)f(x,y,y') = 0$$

eine exakte Differentialgleichung darstellt. Im Allgemeinen muss man zur Bestimmung von M eine partielle Differentialgleichung lösen. Einfacher verhält es sich, wenn Eulersche Multiplikatoren existieren, die nur von einer der beiden Variablen x oder y abhängen. In diesem Fall erhält man M als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

(i) Wie lautet die partielle Differentialgleichung, der $M = M(x,y)$ genügen muss?

(ii) Zeigen Sie, dass

$$f(x,y,y') := [\sin x - x\cos x - 3x^2(y-x)^2] + 3x^2(y-x)^2 y' = 0$$

nicht exakt ist.

(iii) Zeigen Sie, dass ein Eulerscher Multiplikator $M = M(x)$ so existiert, dass

$$M(x)f(x,y,y') = 0 \tag{1}$$

exakt ist.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung (1).

Abgabetermin: Montag 12. November 2007, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.