Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

12. November 2007

Analysis III
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = t^2 + \exp(-(u(t))^2), \quad u(0) = 0$$

für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert und in diesem Intervall der Ungleichung $|u(t)| \leq 1$ genügt.

Aufgabe 4.2 Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t)u'(t) + (1 + (u(t))^2)\sin(t) = 0, \quad u(0) = 1$$

auf dem Intervall $(-2\arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2}), 2\arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2}))$ existiert.

Aufgabe 4.3 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in U$. Mit $S := [0,h] \times U$ sei $f \in \mathcal{C}_b^0(S, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann ein $a > 0$ und ein $x \in \mathcal{C}^1([0,a], \mathbb{R}^n)$ existiert mit $x(0) = x_0$ und $x' = f(\cdot, x)$.

Aufgabe 4.4 Es sei $h > 0$ und $S := [0,h] \times \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge in S der Abschätzung

$$|t|\,|f(t,x) - f(t,y)| \leq |x - y|.$$

Besitzt das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$
$$x(0) = x_0$$

unter diesen Voraussetzungen eine Lösung $x \in \mathcal{C}^1([0,h], \mathbb{R}^n)$? Begründen Sie Ihre Behauptung.

Abgabetermin: Montag 19. November 2007, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.