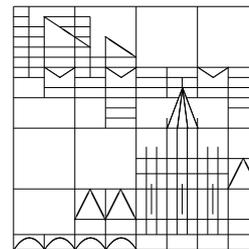


12. November 2007



Analysis III 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = t^2 + \exp(-(u(t))^2), \quad u(0) = 0$$

für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert und in diesem Intervall der Ungleichung $|u(t)| \leq 1$ genügt.

Aufgabe 4.2 Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t)u'(t) + (1 + (u(t))^2) \sin(t) = 0, \quad u(0) = 1$$

auf dem Intervall $(-2 \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2}), 2 \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2}))$ existiert.

Aufgabe 4.3 Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in U$. Mit $S := [0, h] \times U$ sei $f \in C_b^0(S, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann ein $a > 0$ und ein $x \in C^1([0, a], \mathbb{R}^n)$ existiert mit $x(0) = x_0$ und $x' = f(\cdot, x)$.

Aufgabe 4.4 Es sei $h > 0$ und $S := [0, h] \times \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge in S der Abschätzung

$$|t| |f(t, x) - f(t, y)| \leq |x - y|.$$

Besitzt das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

$$x(0) = x_0$$

unter diesen Voraussetzungen eine Lösung $x \in C^1([0, h], \mathbb{R}^n)$? Begründen Sie Ihre Behauptung.