Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

26. November 2007

Analysis III
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Es sei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Fundamentalsystem von $Lu := \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)}$, $a_k \in \mathcal{C}([a,b])$, $k = 0, ..., n$ und

$$R_i[u] := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} u^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik} u^{(k)}(b), \quad \alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n, \quad k = 0, ..., n-1$$

die Randoperatoren. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gilt: $\det(R_i[\psi_k])_{i,k} \neq 0$ für ein Fundamentalsystem $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$.

(ii) Es gilt: $\det(R_i[\psi_k])_{i,k} \neq 0$ für jedes Fundamentalsystem $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$.

(iii) Die homogene Randwertaufgabe

$$Lu = 0, \quad R_i[u] = 0, \quad i = 1, ..., n$$

besitzt nur die Lösung $u \equiv 0$.

Aufgabe 6.2 Gegeben sei das inhomogene Randwertproblem

$$Lu := \sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} = r, \quad a_k, r \in \mathcal{C}([a,b]), \quad k = 0, ..., n,$$

$$R_i[u] := \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} u^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik} u^{(k)}(b) = \gamma_i, \quad \alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n, \quad k = 0, ..., n-1,$$

wobei die homogene Aufgabe $Lu = 0$, $R_i[u] = 0$, $i = 1, ..., n$, nur die Lösung $u = 0$ besitzt. Finden Sie eine Darstellung der Lösung des inhomogenen Randwertproblems, indem Sie das Randwertproblem auf ein Problem mit homogenen Randwerten zurückführen.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass eine Funktion $w \in \mathcal{C}^n([a,b])$ existiert, welche die Randbedingungen $R_i[w] = \gamma_i$, $i = 1, ..., n$ erfüllt.

Aufgabe 6.3 Lösen Sie das Randwertproblem

$$u'' + k^2 u = x, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2,$$

wobei $k \neq n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ gelte.

Aufgabe 6.4 Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}([a,b])$ und gilt

$$\int_a^b f(x)r(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } r \in \mathcal{C}([a,b]),$$

dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Abgabetermin: Montag 3. Dezember 2007, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.