Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

17. Dezember 2007

Analysis III
9. Übungsblatt

Definition Es sei X eine beliebige Menge. Eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt konvergent gegen $A \subset X$, falls

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

gilt. Man schreibt $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 9.1 [Freiwillig] Es sei φ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ über X. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen aus $\mathcal{R}$ (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$) mit $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

(ii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Mengen aus $\mathcal{R}$ (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$) mit $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{R}$ und $\varphi(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

Aufgabe 9.2 [Freiwillig] Es sei $X := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich }\}$. Ferner sei für $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{falls} \quad A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{A}$ ist eine Algebra über X.

(ii) $\mathcal{A}$ ist keine σ-Algebra.

(iii) μ ist ein Inhalt.

(iv) μ ist nicht σ-additiv.

Aufgabe 9.3 Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Für $A \subset X$ sei

$$\zeta(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls} \quad A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls} \quad A \text{ unendlich.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ζ ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ definiert und dass ζ genau dann σ-endlich ist, falls X abzählbar ist.

Aufgabe 9.4 Es sei X eine nichtleere Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring in X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ (d.h. μ ist ein Inhalt und μ ist σ-additiv). Weiter sei

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{A \in \mathcal{P}(X) | \forall R \in \mathcal{R} : A \cap R \in \mathcal{R}\}$$

und

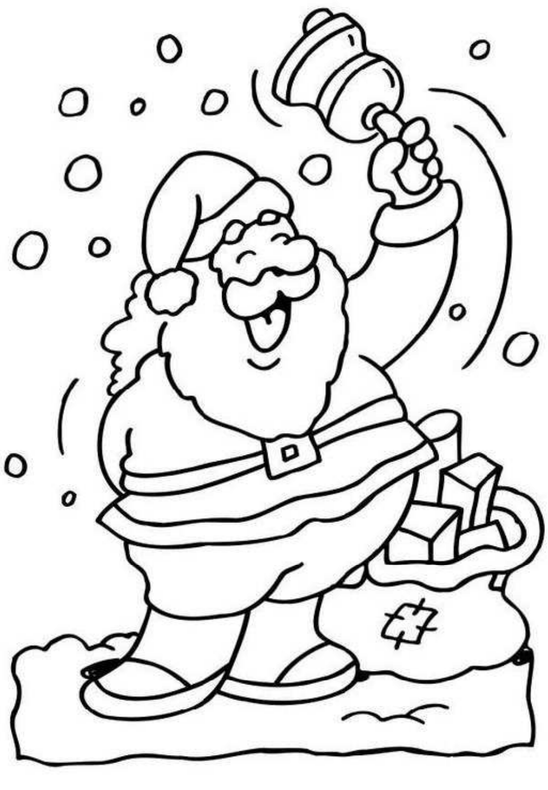
$$\tilde{\mu}(A) := \sup\{\mu(R) : R \subset A, R \in \mathcal{R}\}$$

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(i) Das Mengensystem $\tilde{\mathcal{R}}$ ist eine Algebra in X mit $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{R}}$.

(ii) Die Abbildung $\tilde{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\tilde{\mathcal{R}}$, welches μ fortsetzt.

Aufgabe 9.5 Malen Sie aus: (Abgabe des Bildes: Donnerstag, 20. Dezember, vor 10:00 Uhr in den markierten Briefkasten bei F411.)



Abgabetermin: Montag, 7. Januar 2008, vor 13:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.

WIR WÜNSCHEN IHNEN EINE FROHE WEIHNACHT UND VIEL ERFOLG IM NEUEN JAHR!