Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

27. April 2006

Analysis IV
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Ferner sei $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra über X bzw. Y. Zeigen Sie:

(i) $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ ist eine σ-Algebra über X.

(ii) $f_*(\mathcal{A}) := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra über Y.

Aufgabe 1.2 Es sei X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie: Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn gilt:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) Für $A,\, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Für $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 1.3 Es sei X eine beliebige Menge und $A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$. Wir definieren

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

Zeigen Sie: $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 1.4 Zeigen Sie, dass es keine σ-Algebra gibt, die aus einer unendlichen, aber abzählbaren Anzahl von Elementen besteht.

Abgabetermin: Donnerstag 04. Mai 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.