Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

29. Juni 2006

Analysis IV
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ferner sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein System von Halbnormen auf X, so dass aus $p_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $x = 0$ ist. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow [0,\infty), \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \end{aligned}$$

eine Metrik auf X gegeben ist.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $t \longmapsto \frac{t}{1+t}$ auf Monotonie.

Aufgabe 10.2 Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Sind A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$, so existieren offene Teilmengen G und H von X, so dass $A \subset G$, $B \subset H$ und $G \cap H = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 10.3 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \le i \le n$ sei $\pi_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente. Damit definieren wir $p_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ durch $p_i(x) := |\pi_i(x)|$. Zeigen Sie, dass p_i für $i = 1,...,n$ eine Halbnorm ist und dass die lokalkonvexe Topologie zu $\{p_i : i = 1,...,n\}$ auf $\mathbb{R}^n$ gleich der üblichen (Norm-) Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 10.4

(*i*) Es seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Die Menge $\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(Y)$ sei eine Subbasis der Topologie $\mathcal{T}_Y$. Beweisen Sie: Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt.

(*ii*) Es sei $(X,\mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Relativtopologie bezüglich der Normtopologie auf $\mathbb{R}$ versehen und $f\colon X \to [0,1]$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Sind $f^{-1}((a,1]), f^{-1}([0,b)) \in \mathcal{T}_X$ für alle $0 < a,b < 1$, so ist f stetig.

Abgabetermin: Donnerstag 06. Juli 2006 vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.