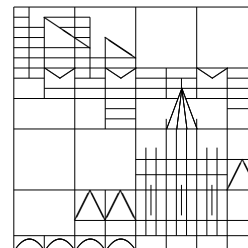


29. Juni 2006



Analysis IV 10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ferner sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein System von Halbnormen auf X , so dass aus $p_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $x = 0$ ist. Zeigen Sie, dass durch

$$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty), \\ (x, y) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

eine Metrik auf X gegeben ist.

HINWEIS: Untersuchen Sie die Funktion $f: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $t \longmapsto \frac{t}{1+t}$ auf Monotonie.

Aufgabe 10.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Sind A und B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$, so existieren offene Teilmengen G und H von X , so dass $A \subset G$, $B \subset H$ und $G \cap H = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 10.3 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $\pi_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die i -te Komponente. Damit definieren wir $p_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ durch $p_i(x) := |\pi_i(x)|$. Zeigen Sie, dass p_i für $i = 1, \dots, n$ eine Halbnorm ist und dass die lokalkonvexe Topologie zu $\{p_i : i = 1, \dots, n\}$ auf \mathbb{R}^n gleich der üblichen (Norm-) Topologie auf \mathbb{R}^n ist.

Aufgabe 10.4

- (i) Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Die Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ sei eine Subbasis der Topologie \mathcal{T}_Y . Beweisen Sie: Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X$ für alle $S \in \mathcal{S}$ gilt.
- (ii) Es sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ mit der Relativtopologie bezüglich der Normtopologie auf \mathbb{R} versehen und $f: X \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Sind $f^{-1}((a, 1]), f^{-1}([0, b)) \in \mathcal{T}_X$ für alle $0 < a, b < 1$, so ist f stetig.