Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

06. Juli 2006

Analysis IV
11. Übungsblatt

Definition 11.1 *Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Ferner sei $X := \prod_{i\in I} X_i$. Die gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X für welche alle Projektionen $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ stetig sind, heißt die Produkttopologie auf X.*

Aufgabe 11.1 Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen und $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ versehen. Beweisen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 11.2 Es sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ versehen und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sei ein weiterer topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon Y \longrightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn für jede Projektion $\pi_i\colon X \longrightarrow X_i$ die Komposition $\pi_i \circ f\colon Y \longrightarrow X_i$ stetig ist.

Definition 11.2 *Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig in $p \in X$, falls für jede Umgebung U von $f(p)$ die Menge $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von p ist.*

Aufgabe 11.3 Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie: Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann im Punkt $p \in X$ stetig, wenn für jede Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $p_n \to p$ die Folge $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(p)$ konvergiert.

Aufgabe 11.4 Es sei X ein separabler metrischer Raum. Zeigen Sie: X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe 11.5 Vermutlich ist das Ausscheiden der deutschen Nationalelf auf die ungünstige Wahl der Topologie auf dem Fußballfeld zurückzuführen. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass ein Fußballspieler als Punkt des $\mathbb{Q}^2$ aufgefaßt werden kann. Die Tore des Fußballfeldes $F := ([0,2]\times[0,1])\cap\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ seien $I := ([0,\frac{1}{8}]\times[\frac{3}{8},\frac{5}{8}])\cap F$ (Italien) und $D := ([\frac{15}{8},2]\times[\frac{3}{8},\frac{5}{8}])\cap F$ (Deutschland). Ein Positionswechsel des Balles wird durch eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ beschrieben. Ein Tor fällt genau dann, wenn ein Fußballspieler einen Positionswechsel $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Balles auslöst, so dass $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $p \in (0,\frac{1}{8}) \times (\frac{3}{8},\frac{5}{8})$ oder gegen einen Punkt $p' \in (\frac{15}{8},2) \times (\frac{3}{8},\frac{5}{8})$ konvergiert. Nun zur Aufgabe: Finden Sie eine Topologie auf F, so dass es für Deutschland möglichst einfach und für Italien möglichst schwer ist, das Tor des Gegners zu treffen.

Abgabetermin: Donnerstag 13. Juli 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.