Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

04. Mai 2006

Analysis IV
2. Übungsblatt

Definition 2.1 *Es sei X eine beliebige Menge. Eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt konvergent gegen $A \subset X$, falls*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

gilt. Man schreibt $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 2.1 Es sei φ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathscr{R}$ über X. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(*i*) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen aus $\mathscr{R}$ (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$) mit $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{R}$, so gilt

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

(*ii*) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Mengen aus $\mathscr{R}$ (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$) mit $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{R}$ und $\varphi(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

Aufgabe 2.2 Es sei X eine nichtleere Menge, $\mathscr{R}$ ein Ring in X und μ ein Prämaß auf $\mathscr{R}$ (d.h. μ ist ein Inhalt und μ ist σ-additiv). Weiter sei

$$\tilde{\mathscr{R}} := \{A \in \mathscr{P}(X) | \forall R \in \mathscr{R} : A \cap R \in \mathscr{R}\}$$

und

$$\tilde{\mu}(A) := \sup\{\mu(R) : R \subset A, R \in \mathscr{R}\}$$

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(*i*) Das Mengensystem $\tilde{\mathscr{R}}$ ist eine Algebra in X mit $\mathscr{R} \subset \tilde{\mathscr{R}}$.

(*ii*) Die Abbildung $\tilde{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\tilde{\mathscr{R}}$, welches μ fortsetzt.

Definition 2.2 *Ein äusseres Maß* $\tilde{\mu}$ *auf einem metrischen Raum* (X,d) *heißt metrisches äußeres Maß, falls für beliebige Mengen* $A, B \subset X$ *mit* $\inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\} > 0$ *gilt* $\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$.

Aufgabe 2.3 Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $\tilde{\mu}$ ein äusseres Maß auf X, so dass jede offene Menge $\tilde{\mu}$-messbar ist. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ dann ein metrisches äusseres Maß ist.

Aufgabe 2.4 Es sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und seien μ, ν zwei Maße auf $\mathscr{A}$. Wenn für $A \in \mathscr{A}$ aus $\mu(A) = 0$ schon $\nu(A) = 0$ folgt, so nennen wir ν absolutstetig bezüglich μ und schreiben $\nu \ll \mu$. Es gelte nun $\nu(X) < \infty$. Zeigen Sie

$$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall A \in \mathscr{A} : (\mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon)$$

Abgabetermin: Donnerstag 11. Mai 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.