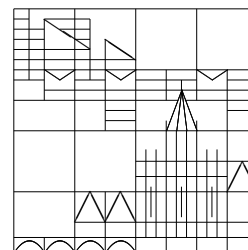


04. Mai 2006



Analysis IV 2. Übungsblatt

Definition 2.1 *Es sei X eine beliebige Menge. Eine Mengenfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt konvergent gegen $A \subset X$, falls*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

gilt. Man schreibt $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Aufgabe 2.1 Es sei φ ein σ -additiver Inhalt auf einem Ring \mathcal{R} über X . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Mengen aus \mathcal{R} (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}$) mit $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n).$$

- (ii) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Mengen aus \mathcal{R} (d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n$) mit $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{R}$ und $\varphi(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\varphi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n).$$

Aufgabe 2.2 Es sei X eine nichtleere Menge, \mathcal{R} ein Ring in X und μ ein Prämaß auf \mathcal{R} (d.h. μ ist ein Inhalt und μ ist σ -additiv). Weiter sei

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall R \in \mathcal{R} : A \cap R \in \mathcal{R}\}$$

und

$$\tilde{\mu}(A) := \sup \{\mu(R) : R \subset A, R \in \mathcal{R}\}$$

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

- (i) Das Mengensystem $\tilde{\mathcal{R}}$ ist eine Algebra in X mit $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{R}}$.
 (ii) Die Abbildung $\tilde{\mu}$ ist ein Prämaß auf $\tilde{\mathcal{R}}$, welches μ fortsetzt.

Definition 2.2 Ein äusseres Maß $\tilde{\mu}$ auf einem metrischen Raum (X, d) heißt metrisches äusseres Maß, falls für beliebige Mengen $A, B \subset X$ mit $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$ gilt $\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$.

Aufgabe 2.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\tilde{\mu}$ ein äusseres Maß auf X , so dass jede offene Menge $\tilde{\mu}$ -messbar ist. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ dann ein metrisches äusseres Maß ist.

Aufgabe 2.4 Es sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum und seien μ, ν zwei Maße auf \mathcal{A} . Wenn für $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) = 0$ schon $\nu(A) = 0$ folgt, so nennen wir ν absolutstetig bezüglich μ und schreiben $\nu \ll \mu$. Es gelte nun $\nu(X) < \infty$. Zeigen Sie

$$\nu \ll \mu \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{A} : (\mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon)$$