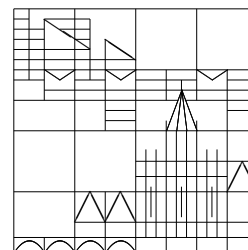


11. Mai 2006



Analysis IV 3. Übungsblatt

Definition 3.1 *Es seien (X, \mathcal{A}) und (Y, \mathcal{B}) Messräume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt.*

Aufgabe 3.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und (X, \mathcal{A}) und (Y, \mathcal{B}) Messräume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für festes $y \in Y$ ist die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) = y$ ($x \in X$) messbar.
2. Es sei $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ (d.h. \mathcal{E} ist ein Erzeugendensystem von \mathcal{B}). Dann ist $f : X \rightarrow Y$ genau dann \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ gilt.

Aufgabe 3.2 Für $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $(-\infty, b] := (-\infty, b_1] \times \dots \times (-\infty, b_n]$. Damit seien

$$\begin{aligned} J_1 &:= \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n\}, & J_2 &:= \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}^n\}, \\ J_3 &:= \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}^n\}, & J_4 &:= \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{Q}^n\}, \\ J_5 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen}\}, & J_6 &:= \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt}\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass J_1 bis J_6 jeweils die σ -Algebra der Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen.

Aufgabe 3.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie: Es existieren Borelmengen $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subset M \subset G$ und $\lambda(G \setminus M) = \lambda(M \setminus F) = 0$.

Aufgabe 3.4 Es sei μ ein endlicher, σ -additiver Inhalt auf einer Algebra \mathcal{A} und μ^* das zu μ gehörige äussere Maß. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir weiter

$$d_{\mu^*}(A, B) := \mu^*(A \Delta B),$$

hierbei ist $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die „symmetrische Differenz“ von A und B . Zeigen Sie: Für das Mengensystem $\bar{\sigma}(\mathcal{A})$ aller μ^* -meßbaren Mengen gilt

$$\bar{\sigma}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mathcal{P}(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A} : d_{\mu^*}(A, B) < \varepsilon\}.$$