Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

11. Mai 2006

Analysis IV
3. Übungsblatt

Definition 3.1 *Es seien $(X, \mathscr{A})$ und $(Y, \mathscr{B})$ Messräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, falls $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ für alle $B \in \mathscr{B}$ gilt.*

Aufgabe 3.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $(X, \mathscr{A})$ und $(Y, \mathscr{B})$ Messräume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für festes $y \in Y$ ist die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(x) = y$ $(x \in X)$ messbar.
2. Es sei $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$ (d.h. $\mathscr{E}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathscr{B}$). Dann ist $f : X \longrightarrow Y$ genau dann $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{E}) \subset \mathscr{A}$ gilt.

Aufgabe 3.2 Für $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $(-\overline{\infty}, b] := (-\infty, b_1] \times \cdots \times (-\infty, b_n]$. Damit seien

$$J_1 := \big\{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{R}^n\big\}, \qquad J_2 := \big\{(a,b] \mid a,\, b \in \mathbb{Q}^n\big\},$$
$$J_3 := \big\{(-\overline{\infty}, a] \mid a \in \mathbb{R}^n\big\}, \qquad J_4 := \big\{(-\overline{\infty}, a] \mid a \in \mathbb{Q}^n\big\},$$
$$J_5 := \big\{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen}\big\}, \qquad J_6 := \big\{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt}\big\}.$$

Beweisen Sie, dass J_1 bis J_6 jeweils die σ-Algebra der Borelmengen $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen.

Aufgabe 3.3 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie: Es existieren Borelmengen $F, G \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subset M \subset G$ und $\lambda(G \setminus M) = \lambda(M \setminus F) = 0$.

Aufgabe 3.4 Es sei μ ein endlicher, σ-additiver Inhalt auf einer Algebra $\mathscr{A}$ und μ^* das zu μ gehörige äussere Maß. Für $A, B \in \mathscr{P}(X)$ definieren wir weiter

$$d_{\mu^*}(A, B) := \mu^*(A \Delta B),$$

hierbei ist $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die „symmetrische Differenz" von A und B. Zeigen Sie: Für das Mengensystem $\overline{\sigma}(\mathscr{A})$ aller μ^*-meßbaren Mengen gilt

$$\overline{\sigma}(\mathscr{A}) \subset \{B \in \mathscr{P}(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathscr{A} : d_{\mu^*}(A, B) < \varepsilon\}.$$

Abgabetermin: Donnerstag 18. Mai 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.