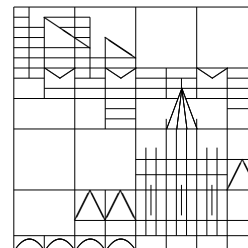


18. Mai 2006



## Analysis IV 4. Übungsblatt

**Aufgabe 4.1** Es sei  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine bijektive, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass  $T(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  Lebesgue-messbar ist und dass die durch  $\mu(A) := \lambda(T(A))$  definierte Abbildung  $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  ist.

**Aufgabe 4.2** Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  beliebig gewählt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ , dann gilt mit  $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ :

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

(ii) Ist  $A \in \mathcal{A}$  beliebig gewählt und  $N \in \mathcal{A}$  eine  $\mu$ -Nullmenge, so folgt

$$\int_A f d\mu = \int_{A \cup N} f d\mu.$$

**Definition 4.1** Wir setzen  $\overline{\mathbb{R}}^n := (\overline{\mathbb{R}})^n$  und definieren die Borel-Sigma-Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}^n$  durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma(\{(a, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}^n : a \in \mathbb{R}^n\})$$

**Aufgabe 4.3** Es sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{A}$ -meßbare Abbildungen. Ferner sei die Abbildung  $F: \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ -meßbar. Zeigen Sie:  $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $h(x) := F(f_1(x), \dots, f_n(x))$ , ( $x \in X$ ) ist  $\mathcal{A}$ -meßbar.

**Aufgabe 4.4** Eine Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Radon-Maßen auf einem lokal-kompakten Raum  $\mathfrak{E}$  konvergiert genau dann gegen ein Radon-Maß  $\mu$ , wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jede kompakte Menge  $K \subset \mathfrak{E}$  und jede offene relativ kompakte Menge  $G \subset \mathfrak{E}$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K) \text{ bzw. } \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

Man hat dabei nur zu beachten, dass das Radon-Maß  $\mu$  das zur Linearform  $I_\mu$  gehörige essentielle Maß  $\mu_{\mathfrak{E}ss}$  ist. Unterstreichen Sie den Begriff „offen“ mit einem Farbstift Ihrer Wahl, wobei auf ein Lineal nicht verzichtet werden darf. Diskutieren Sie dann den unterstrichenen Begriff mit Ihrem Nebensitzer (sofern vorhanden).