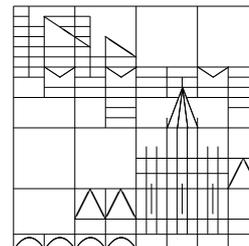


18. Mai 2006



Analysis IV 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Es sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $T(A)$ für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-messbar ist und dass die durch $\mu(A) := \lambda(T(A))$ definierte Abbildung $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 4.2 Es sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ beliebig gewählt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt mit $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$:

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

(ii) Ist $A \in \mathcal{A}$ beliebig gewählt und $N \in \mathcal{A}$ eine μ -Nullmenge, so folgt

$$\int_A f d\mu = \int_{A \cup N} f d\mu.$$

Definition 4.1 Wir setzen $\overline{\mathbb{R}}^n := (\overline{\mathbb{R}})^n$ und definieren die Borel-Sigma-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}^n$ durch

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma(\{(a, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}^n : a \in \mathbb{R}^n\})$$

Aufgabe 4.3 Es sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum und $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -meßbare Abbildungen. Ferner sei die Abbildung $F: \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ -meßbar. Zeigen Sie: $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) := F(f_1(x), \dots, f_n(x))$, ($x \in X$) ist \mathcal{A} -meßbar.

Aufgabe 4.4 Eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Radon-Maßen auf einem lokal-kompakten Raum \mathfrak{E} konvergiert genau dann gegen ein Radon-Maß μ , wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jede kompakte Menge $K \subset \mathfrak{E}$ und jede offene relativ kompakte Menge $G \subset \mathfrak{E}$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K) \text{ bzw. } \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

Man hat dabei nur zu beachten, dass das Radon-Maß μ das zur Linearform I_μ gehörige essentielle Maß $\mu_{\mathfrak{E}ss}$ ist. Unterstreichen Sie den Begriff „offen“ mit einem Farbstift Ihrer Wahl, wobei auf ein Lineal nicht verzichtet werden darf. Diskutieren Sie dann den unterstrichenen Begriff mit Ihrem Nebensitzer (sofern vorhanden).