Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

18. Mai 2006

Analysis IV
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Es sei $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive, lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $T(A)$ für jedes $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-messbar ist und dass die durch $\mu(A) := \lambda(T(A))$ definierte Abbildung $\mu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0,\infty]$ ein Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 4.2 Es sei $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ beliebig gewählt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt mit $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$:

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

(ii) Ist $A \in \mathscr{A}$ beliebig gewählt und $N \in \mathscr{A}$ eine μ-Nullmenge, so folgt

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_{A\cup N} f \mathrm{d}\mu.$$

Definition 4.1 *Wir setzen* $\overline{\mathbb{R}}^n := \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^n$ *und definieren die Borel-Sigma-Algebra auf* $\overline{\mathbb{R}}^n$ *durch*

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}^n) := \sigma\left(\{(a,\overline{\infty}] \subset \overline{\mathbb{R}}^n : a \in \mathbb{R}^n\}\right)$$

Aufgabe 4.3 Es sei $(X,\mathscr{A})$ ein Messraum und $f_1,...,f_n\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{A}-$meßbare Abbildungen. Ferner sei die Abbildung $F\colon \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)-$meßbar. Zeigen Sie: $h\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) := F(f_1(x),...,f_n(x))$, $(x \in X)$ ist $\mathscr{A}$-meßbar.

Aufgabe 4.4 Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Radon-Maßen auf einem lokal-kompakten Raum $\mathfrak{E}$ konvergiert genau dann vag gegen ein Radon-Maß μ, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jede kompakte Menge $K \subset \mathfrak{E}$ und jede offene relativ kompakte Menge $G \subset \mathfrak{E}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K) \text{ bzw. } \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

Man hat dabei nur zu beachten, dass das Radon-Maß μ das zur Linearform I_μ gehörige essentielle Maß $\mu_{\mathfrak{Ess}}$ ist. Unterstreichen Sie den Begriff „offen“ mit einem Farbstift Ihrer Wahl, wobei auf ein Lineal nicht verzichtet werden darf. Diskutieren Sie dann den unterstrichenen Begriff mit Ihrem Nebensitzer (sofern vorhanden).

Abgabetermin: Mittwoch 24. Mai 2006 vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.