Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

24. Mai 2006

Analysis IV
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind $\mathscr{A}_1$ und $\mathscr{A}_2$ beliebige $\sigma-$Algebren über Y, so gilt $f^{-1}(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) = f^{-1}(\mathscr{A}_1) \cap f^{-1}(\mathscr{A}_2)$.

(ii) Ist $\mathscr{E} \subset P(Y)$ gegeben, so gilt:

$$f^{-1}\left(\sigma(\mathscr{E})\right) = \bigcap_{\substack{\mathscr{A}\ \sigma-Algebra\\ \mathscr{E}\subset\mathscr{A}}} f^{-1}(\mathscr{A}).$$

Aufgabe 5.2

(i) Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Abbildungen $g, f_n\colon X \longrightarrow [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ seien messbar, wobei $\int g \mathrm{d}\mu < \infty$ sei. Weiter gelte $f_n(x) \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu.$$

(ii) Zeigen Sie, dass man in (i) auf die Majorisierungsvoraussetzung, also auf die Existenz einer Funktion g mit den angegebenen Eigenschaften nicht verzichten kann.

Aufgabe 5.3 Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Ferner sei $\alpha \in [0,1)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $E \subset U$ und $\alpha\lambda(U) \leq \lambda(E)$.

(ii) Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $\alpha\lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$ gilt.

Hinweis: Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, so dass $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gilt. Diese Aussage dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 5.4 Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Zeigen Sie, dass ein $b > 0$ existiert, so dass $(-b, b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 5.3: Setzen Sie $\alpha := \frac{3}{4}$ und beweisen Sie dann, dass $\left(-\frac{1}{2}\lambda(I), \frac{1}{2}\lambda(I)\right) \subset E - E$ gilt.

Abgabetermin: Donnerstag 01. Juni 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.