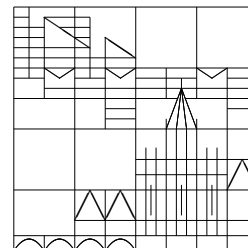


24. Mai 2006



Analysis IV 5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Es seien X und Y nichtleere Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sind \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 beliebige σ -Algebren über Y , so gilt $f^{-1}(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = f^{-1}(\mathcal{A}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{A}_2)$.

(ii) Ist $\mathcal{E} \subset P(Y)$ gegeben, so gilt:

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}}} f^{-1}(\mathcal{A}).$$

Aufgabe 5.2

(i) Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Die Abbildungen $g, f_n: X \rightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ seien messbar, wobei $\int g d\mu < \infty$ sei. Weiter gelte $f_n(x) \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu.$$

(ii) Zeigen Sie, dass man in (i) auf die Majorisierungsvoraussetzung, also auf die Existenz einer Funktion g mit den angegebenen Eigenschaften nicht verzichten kann.

Aufgabe 5.3 Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Ferner sei $\alpha \in (0, 1)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $E \subset U$ und $\alpha\lambda(U) \leq \lambda(E)$.

(ii) Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so dass $\alpha\lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$ gilt.

HINWEIS: Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten offenen Intervallen in \mathbb{R} , so dass $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ gilt. Diese Aussage dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 5.4 Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und beschränkt mit $0 < \lambda(E)$. Zeigen Sie, dass ein $b > 0$ existiert, so dass $(-b, b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ gilt.

HINWEIS: Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 5.3: Setzen Sie $\alpha := \frac{3}{4}$ und beweisen Sie dann, dass $(-\frac{1}{2}\lambda(I), \frac{1}{2}\lambda(I)) \subset E - E$ gilt.