Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

01. Juni 2006

Analysis IV
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (Wiederholung)

(a) Finden Sie einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ für welchen die folgenden Aussagen (i), (ii) und (iii) falsch sind. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

- (i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen Mengen in X und $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so ist $A \in \mathcal{T}$.
- (ii) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen in X, so ist $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ abgeschlossen.
- (iii) Ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Mengen in X, so ist $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ kompakt.

(b) Zeigen Sie: Eine Topologie ist im Allgemeinen keine σ-Algebra.

Aufgabe 6.2 (Wiederholung) Es seien $(X, \mathscr{A})$ und $(Y, \mathscr{B})$ Messräume. Ferner sei $\mathscr{B}$ von $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ erzeugt und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{E})).$$

Aufgabe 6.3 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und beschränkt. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \subset M$ mit $\lambda(M \setminus U) < \varepsilon$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K \supset M$ mit $\lambda(K \setminus M) < \varepsilon$.

Aufgabe 6.4 Wir erklären auf $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ und bezeichnen die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in [-1, 1]$ mit $[x]$. Sei A ein Vertretersystem dieser Äquivalenzrelation, also $[-1, 1] = \bigcup_{x\in A}[x]$, wobei $[x_1] \neq [x_2]$ für $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ (die Existenz eines solchen Vertretersystems sichert das sogenannte Auswahlaxiom). Zeigen Sie, dass A nicht Lebesgue-messbar ist.

Abgabetermin: Donnerstag 08. Juni 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.