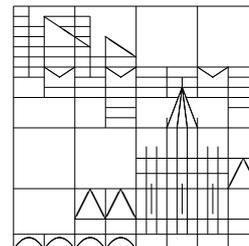


08. Juni 2006



Analysis IV 7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 (Wiederholung) Es sei (X, \mathcal{C}) ein Messraum. Ferner seien $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$$

messbar ist.

Definition 7.1 Es sei $y \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar. Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{c \rightarrow -\infty+} \int_c^y f(t) dt$$

und

$$\lim_{c \rightarrow \infty-} \int_y^c f(t) dt$$

so definiert man das uneigentliche (Riemann-) Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{c \rightarrow -\infty+} \int_c^y f(t) dt + \lim_{c \rightarrow \infty-} \int_y^c f(t) dt.$$

Aufgabe 7.2

- (i) Eine auf \mathbb{R} definierte, messbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sei auf jedem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann Lebesgue-integrierbar über \mathbb{R} , wenn das uneigentliche Riemann-Integral existiert. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

- (ii) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie: Aus der Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals folgt im Allgemeinen nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit.

HINWEIS: Sie dürfen verwenden, dass $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $[0, \infty)$ ist.

Aufgabe 7.3 Es sei $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := e^{x^2 y^2}$ definiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(y) := \int_{[0,1]} f(x, y) d\lambda(x), \quad (y \in \mathbb{R})$$

stetig differenzierbar ist.

Abgabetermin: Mittwoch 14. Juni 2006 vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.