Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

08. Juni 2006

Analysis IV
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 (Wiederholung) Es sei $(X, \mathcal{C})$ ein Messraum. Ferner seien $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$$

messbar ist.

Definition 7.1 *Es sei $y \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ Riemann-integrierbar. Existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{c\to-\infty+} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t$$

und

$$\lim_{c\to\infty-} \int_y^c f(t)\mathrm{d}t$$

so definiert man das uneigentliche (Riemann-) Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t := \lim_{c\to-\infty+} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t + \lim_{c\to\infty-} \int_y^c f(t)\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 7.2

(*i*) Eine auf $\mathbb{R}$ definierte, messbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ sei auf jedem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}$, wenn das uneigentliche Riemann-Integral existiert. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\lambda.$$

(*ii*) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie: Aus der Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals folgt im Allgemeinen nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $[0, \infty)$ ist.

Aufgabe 7.3 Es sei $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := e^{x^2y^2}$ definiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(y) := \int_{[0,1]} f(x,y) \mathrm{d}\lambda(x), \qquad (y \in \mathbb{R})$$

stetig differenzierbar ist.

Abgabetermin: Mittwoch 14. Juni 2006 vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.