Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

15. Juni 2006

Analysis IV
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 **(Wiederholung)** Zeigen Sie mit Hilfsmitteln der Analysis IV:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}\lambda(x)=1.$$

Aufgabe 8.2 Es sei $p \geq 1$ und $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \mathrm{d}\lambda(x) = p\int_{[0,\infty)} t^{p-1}\lambda\left(\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)>t\}\right)\mathrm{d}\lambda(t)$$

Aufgabe 8.3 Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\zeta\colon \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf X und $f\colon X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann summierbar ist, falls $f \in \mathscr{L}^1(\zeta)$, und dass in diesem Fall die Gleichheit $\sum_{x\in X} f(x) = \int f d\zeta$ gilt.

Aufgabe 8.4

(*i*) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu_g\colon \mathscr{B}([a,b]) \to [0,\infty]$ existiert mit

$$\mu_g((s,t]) = g(t) - g(s) \quad (a \leq s < t \leq b)$$

und $\mu_g(\{a\}) = 0$.

(*ii*) Sei nun $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monton wachsend und rechtsstetig. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu_g\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ existiert mit $\mu_g((s,t]) = g(t) - g(s) \quad (s < t)$. Wann ist μ_g endlich?

Abgabetermin: Donnerstag 22. Juni 2006 vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.