Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Olaf Weinmann

22. Juni 2006

Analysis IV
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n; \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in (0,1)\}$$

messbar ist und bestimmen Sie deren Maß.

Definition 9.1 *Es sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum.*

(i) *Eine Menge $U \subset X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.*

(ii) *Eine Menge $U \subset X$ heißt eine Umgebung von $x \in X$, falls ein $V \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in V \subset U$.*

(iii) *Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist.*

Aufgabe 9.2 Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) f ist stetig im Sinn von Definition 9.1.

(ii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge von Y ist abgeschlossen.

(iii) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ ist die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

Aufgabe 9.3 Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Menge $\mathcal{T}_1 := \{X, \emptyset\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

(ii) Die Menge $\mathcal{T}_2 := \{X, \emptyset\} \cup \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9.4 Es sei X eine Menge und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum. Ferner sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Finden Sie eine bezüglich Mengeninklusion kleinste Topologie auf X, so dass f stetig wird. Ist diese Topologie eindeutig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Abgabetermin: Donnerstag 29. Juni 2006 vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.