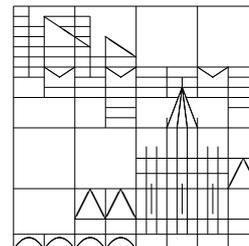


22. Juni 2006



Analysis IV 9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n; \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)\}$$

messbar ist und bestimmen Sie deren Maß.

Definition 9.1 Es sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum.

- (i) Eine Menge $U \subset X$ heißt abgeschlossen, falls ihr Komplement offen ist.
- (ii) Eine Menge $U \subset X$ heißt eine Umgebung von $x \in X$, falls ein $V \in \mathcal{T}$ existiert mit $x \in V \subset U$.
- (iii) Sei (Y, \mathcal{T}_Y) ein weiterer topologischer Raum. Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Aufgabe 9.2 Es seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) f ist stetig im Sinn von Definition 9.1.
- (ii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge von Y ist abgeschlossen.
- (iii) Für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ ist die Menge $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x .

Aufgabe 9.3 Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Die Menge $\mathcal{T}_1 := \{X, \emptyset\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ist eine Topologie auf \mathbb{R} .
- (ii) Die Menge $\mathcal{T}_2 := \{X, \emptyset\} \cup \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\}$ ist eine Topologie auf \mathbb{R} .

Aufgabe 9.4 Es sei X eine Menge und (Y, \mathcal{T}_Y) ein topologischer Raum. Ferner sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Finden Sie eine bezüglich Mengeninklusion kleinste Topologie auf X , so dass f stetig wird. Ist diese Topologie eindeutig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.