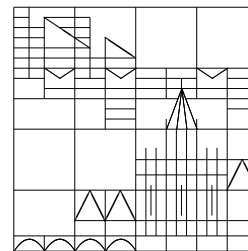


Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PROF. DR. REINHARD RACKE
DIPL.-MATH. OLAF WEINMANN

21. April 2008



Funktionalanalysis 1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Es sei E ein Vektorraum. Zeigen Sie: Zu jeder linear unabhängigen Teilmenge M von E gibt es eine M umfassende Basis von E . Ist $E \neq \{0\}$, so besitzt E eine Basis.

Aufgabe 1.2 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Die Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist stetig.
- (ii) $\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.
- (iii) f ist folgenstetig.

Aufgabe 1.3 Es sei X eine Menge und (Y, \mathcal{T}_Y) ein topologischer Raum. Ferner sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Finden Sie eine bezüglich Mengeninklusion kleinste Topologie auf X , so dass f stetig wird. Ist diese Topologie eindeutig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 1.4 Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (X, d) zu einem beschränkten metrischen Raum (X, d') homöomorph ist.

HINWEIS: Betrachten Sie: $d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$.