Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

21. April 2008

Funktionalanalysis
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Es sei E ein Vektorraum. Zeigen Sie: Zu jeder linear unabhängigen Teilmenge M von E gibt es eine M umfassende Basis von E. Ist $E \neq \{0\}$, so besitzt E eine Basis.

Aufgabe 1.2 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist stetig.

(ii) $\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

(iii) f ist folgenstetig.

Aufgabe 1.3 Es sei X eine Menge und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum. Ferner sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Finden Sie eine bezüglich Mengeninklusion kleinste Topologie auf X, so dass f stetig wird. Ist diese Topologie eindeutig? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 1.4 Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum (X, d) zu einem beschränkten metrischen Raum (X, d') homöomorph ist.

Hinweis: Betrachten Sie: $d'(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

Abgabetermin: Montag 28. April 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.