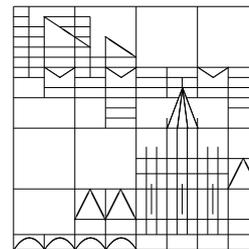


23. Juni 2008



## Funktionalanalysis 10. Übungsblatt

**Aufgabe 10.1** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i)  $A$  ist abschließbar.
- (ii) Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  mit  $x_n \rightarrow 0$  und  $Ax_n \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt:  $y = 0$ .

**Aufgabe 10.2** Es seien  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $X$  ein Hilbertraum und  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  linear mit  $\overline{D(A)} = X$ . Beweisen Sie die folgende Aussage:  $A$  ist genau dann symmetrisch, falls für alle  $x \in D(A)$  gilt:  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 10.3** Der Operator  $S$  in  $\ell^2$  sei definiert durch  $Se^{(n)} := e^{(n+1)}$ .

- (i) Bestimmen Sie  $\|S\|$ ,  $S^*$ ,  $SS^*$ ,  $S^*S$  und  $\|S^*\|$ .
- (ii) Bestimmen Sie  $\ker(S)$ ,  $R(S)$ ,  $\ker(S^*)$ , und  $R(S^*)$ .

**Aufgabe 10.4** Es sei  $X := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  und  $A$  durch

$$A: D(A) \subset X \rightarrow X$$

$$D(A) := C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$Av := \operatorname{rot} v$$

erklärt. Zeigen Sie, dass  $A$  symmetrisch, nicht aber selbstadjungiert ist.