Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

23. Juni 2008

Funktionalanalysis
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Seien X und Y Banachräume und $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(*i*) A ist abschließbar.

(*ii*) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_n \to 0$ und $Ax_n \to y$ für $n \to \infty$ folgt: $y = 0$.

Aufgabe 10.2 Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, X ein Hilbertraum und $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ linear mit $\overline{D(A)} = X$. Beweisen Sie die folgende Aussage: A ist genau dann symmetrisch, falls für alle $x \in D(A)$ gilt: $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.3 Der Operator S in ℓ^2 sei definiert durch $Se^{(n)} := e^{(n+1)}$.

(*i*) Bestimmen Sie $\|S\|$, S^*, SS^*, S^*S und $\|S^*\|$.

(*ii*) Bestimmen Sie $\ker(S)$, $R(S)$, $\ker(S^*)$, und $R(S^*)$.

Aufgabe 10.4 Es sei $X := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und A durch

$$A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$$

$$D(A) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$Av := \operatorname{rot} v$$

erklärt. Zeigen Sie, dass A symmetrisch, nicht aber selbstadjungiert ist.

Abgabetermin: Montag 30. Juni 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.