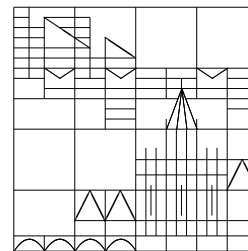


23. Juni 2008



Funktionalanalysis 10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Seien X und Y Banachräume und $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) A ist abschließbar.
- (ii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ mit $x_n \rightarrow 0$ und $Ax_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$ folgt: $y = 0$.

Aufgabe 10.2 Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, X ein Hilbertraum und $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ linear mit $\overline{D(A)} = X$. Beweisen Sie die folgende Aussage: A ist genau dann symmetrisch, falls für alle $x \in D(A)$ gilt: $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.3 Der Operator S in ℓ^2 sei definiert durch $Se^{(n)} := e^{(n+1)}$.

- (i) Bestimmen Sie $\|S\|$, S^* , SS^* , S^*S und $\|S^*\|$.
- (ii) Bestimmen Sie $\ker(S)$, $R(S)$, $\ker(S^*)$, und $R(S^*)$.

Aufgabe 10.4 Es sei $X := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und A durch

$$A: D(A) \subset X \rightarrow X$$

$$D(A) := C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$$Av := \operatorname{rot} v$$

expliziert. Zeigen Sie, dass A symmetrisch, nicht aber selbstadjungiert ist.