Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

30. Juni 2008

Funktionalanalysis
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Es sei $\Omega = \mathbb{R}^3$ und

$$u(x) := \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|x|} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) : \int_{\mathbb{R}^3} u \Delta \varphi \mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Hinweis: Betrachten Sie: $\int_{\mathbb{R}^3} u\Delta\varphi \mathrm{d}x = \int_{|x|<\varepsilon} u\Delta\varphi\mathrm{d}x + \int_{|x|>\varepsilon} u\Delta\varphi\mathrm{d}x$ und schätzen Sie geeignet ab.

Aufgabe 11.2 Seien $u_- \in \mathcal{C}^1([-1,0])$ und $u_+ \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Zeigen Sie, dass

$$u\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} u_-(x) & \text{für} \quad x \leq 0, \\ u_+(x) & \text{für} \quad x > 0, \end{cases}$$

genau dann in $W^{1,2}((-1,1))$ liegt, falls $u_-(0) = u_+(0)$ gilt.

Aufgabe 11.3 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ferner seien $f \in W^{1,p}$ und $g \in W^{1,q}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass dann $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ mit $(fg)' = f'g + fg'$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt.

Aufgabe 11.4 Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(*i*) $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

(*ii*) $u \in L^2(\mathbb{R})$ und es existiert $v \in L^2(\mathbb{R})$, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \varphi(x) \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

für $h \to 0$.

Abgabetermin: Montag 7. Juli 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.