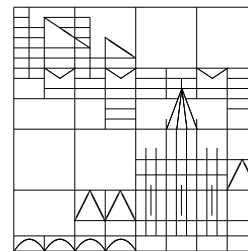


Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PROF. DR. REINHARD RACKE
DIPL.-MATH. OLAF WEINMANN

7. Juli 2008



Funktionalanalysis 12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Es sei S eine beliebige kompakte Teilmenge von \mathbb{C} und $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge von S . Zeigen Sie: Es existiert ein Banachraum X und ein $A \in \mathcal{L}_b(X, X)$ mit $\sigma(A) = S$, genauer: $P_\sigma(A) = \{\lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$, $R_\sigma(A) = \emptyset$ und $C_\sigma(A) = S \setminus P_\sigma(A)$.

HINWEIS: Setzen Sie $X := \ell^2$, $D(A) := X$ und $Ax = ((Ax)_j)_{j \in \mathbb{N}}$ wobei $Ax_j := \lambda_j x_j$.

Aufgabe 12.2 Vermutlich ist das Ausscheiden der deutschen Nationalelf auf die ungünstige Wahl der Topologie auf dem Fußballfeld zurückzuführen. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass ein Fußballspieler als Punkt des \mathbb{Q}^2 aufgefaßt werden kann. Die Tore des Fußballfeldes $F := ([0, 2] \times [0, 1]) \cap \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ seien $S := ([0, \frac{1}{8}] \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]) \cap F$ (Spanien) und $D := ([\frac{15}{8}, 2] \times [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]) \cap F$ (Deutschland). Ein Positionswechsel des Balles wird durch eine Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ beschrieben. Ein Tor fällt genau dann, wenn ein Fußballspieler einen Positionswechsel $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des Balles auslöst, so dass $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $p \in (0, \frac{1}{8}) \times (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ oder gegen einen Punkt $p' \in (\frac{15}{8}, 2) \times (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ konvergiert. Nun zur Aufgabe: Finden Sie eine Topologie auf F , so dass es für Deutschland möglichst einfach und für Spanien möglichst schwer ist, das Tor des Gegners zu treffen.