Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

28. April 2008

Funktionalanalysis
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) A ist (im topologischen Sinn) abgeschlossen.

(ii) $A = \overline{A}$ (im topologischen Sinn).

(iii) A enthält alle seine Häufungspunkte.

Definition 2.2 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für Mengen $A, B \subset X$ sei*

$$\begin{aligned} d(A,B) &:= \inf\{d(x,y) : x \in A,\ y \in B\}, \\ d(A) &:= \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ sei folgenkompakt. Ferner sei $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von A. Zeigen Sie:

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall B \subset A,\ \ d(B) < \delta \ \ \exists \lambda \in \Lambda : \ \ B \subset G_\lambda.$$

Aufgabe 2.4 Es sei $\ell^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Folgen, $c(\mathbb{R})$ die Menge aller konvergenten Folgen und $c_0(\mathbb{R})$ die Menge aller Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Schließlich sei $c_e(\mathbb{R})$ die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = 0$ für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(i) $c_e(\mathbb{R}) \subset c_0(\mathbb{R}) \subset c(\mathbb{R}) \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) $(c_e(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum aber kein Banachraum.

(iii) Zeigen Sie, dass $\overline{c_e(\mathbb{R})} = c_0(\mathbb{R})$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $(c_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 2.5 Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Seien $A, B \subset X$. Zeigen Sie: Ist A kompakt, B abgeschlossen und ist $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $d(A, B) > 0$.

(ii) Es sei $X := \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Sind $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gilt $d(A, B) > 0$.

Abgabetermin: Montag 05. Mai 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.