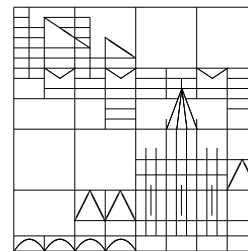


05. Mai 2008



Funktionalanalysis 3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Der \mathbb{K} -Vektorraum X sei mit der Metrik d versehen. Ferner gelte für beliebige $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$:

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$,

(ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \widehat{d}: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, 0) \end{aligned}$$

eine Norm auf X ist.

Aufgabe 3.2 Es seien X ein kompakter metrischer Raum und Y ein Banachraum. Für Funktionen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ definieren wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \in X} \|f(a)\|_Y.$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathcal{C}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum.

(ii) Der Raum $(\mathcal{C}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

Definition 3.3 *Es sei X ein topologischer Raum.*

(i) *Ein System \mathcal{B} von Umgebungen des Punktes $x \in X$ heißt Umgebungsbasis von x , wenn jede Umgebung von x Obermenge einer geeigneten Umgebung aus \mathcal{B} ist.*

(ii) *X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

Aufgabe 3.4 Es sei X ein topologischer Raum, welcher das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) X ist Hausdorffraum.

(ii) Jede konvergente Folge in X besitzt einen eindeutigen Grenzwert.

Definition 3.5 Es sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Halbnorm*, falls

$$(i) \quad \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Aufgabe 3.6 Es sei $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein System von abzählbar vielen Halbnormen auf dem \mathbb{K} -Vektorraum X . Wir definieren nun \mathcal{T} durch:

$$O \in \mathcal{T} : \iff \forall x \in O \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists n_1, \dots, n_m \quad \exists \varepsilon > 0 : B^{n_1}(x, \varepsilon) \cap \dots \cap B^{n_m}(x, \varepsilon) \subset O$$

wobei $B^{n_j}(x, \varepsilon) := \{y \in X : \|y - x\|_{n_j} < \varepsilon\}$. Zeigen Sie: \mathcal{T} ist eine Topologie auf X .

Abgabetermin: Dienstag 13. Mai 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.