Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

05. Mai 2008

# Funktionalanalysis
## 3. Übungsblatt

**Aufgabe 3.1** Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $X$ sei mit der Metrik $d$ versehen. Ferner gelte für beliebige $x, y, z \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$:

(*i*) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$,

(*ii*) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \widehat{d}\colon X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,0) \end{array}$$

eine Norm auf $X$ ist.

**Aufgabe 3.2** Es seien $X$ ein kompakter metrischer Raum und $Y$ ein Banachraum. Für Funktionen $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ definieren wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \in X} \|f(a)\|_Y.$$

Zeigen Sie:

(*i*) $(\mathcal{C}(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Raum.

(*ii*) Der Raum $(\mathcal{C}(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

**Definition 3.3** *Es sei $X$ ein topologischer Raum.*

(*i*) *Ein System $\mathscr{B}$ von Umgebungen des Punktes $x \in X$ heißt Umgebungsbasis von $x$, wenn jede Umgebung von $x$ Obermenge einer geeigneten Umgebung aus $\mathscr{B}$ ist.*

(*ii*) *$X$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

**Aufgabe 3.4** Es sei $X$ ein topologischer Raum, welcher das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(*i*) $X$ ist Hausdorffraum.

(*ii*) Jede konvergente Folge in $X$ besitzt einen eindeutigen Grenzwert.

**Definition 3.5** *Es sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Halbnorm, falls*

(i) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(ii) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**Aufgabe 3.6** Es sei $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein System von abzählbar vielen Halbnormen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $X$. Wir definieren nun $\mathcal{T}$ durch:

$$O \in \mathcal{T} :\Longleftrightarrow \forall x \in O \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; \exists n_1, ..., n_m \;\; \exists \varepsilon > 0 : \quad B^{n_1}(x, \varepsilon) \cap ... \cap B^{n_m}(x, \varepsilon) \subset O$$

wobei $B^{n_j}(x, \varepsilon) := \{y \in X : \|y - x\|_{n_j} < \varepsilon\}$. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $X$.

Abgabetermin: Dienstag 13. Mai 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.