Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

13. Mai 2008

Funktionalanalysis
4. Übungsblatt

Definition 4.1 *Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Familie $(\|\cdot\|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Halbnormen auf X heißt **separierend**, wenn für jedes $x \neq 0$ ein $\lambda \in \Lambda$ existiert mit $\|x\|_\lambda \neq 0$.*

Aufgabe 4.2 Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter sei $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine separierende Familie von Halbnormen auf X. Zeigen Sie:

(i) Durch die Vorschrift

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|x-y\|_i}{1+\|x-y\|_i}, \quad x, y \in X$$

wird eine Metrik d auf X definiert.

(ii) Die durch die Metrik aus (i) induzierte Topologie stimmt mit der Topologie von Aufgabe 3.6 überein.

Aufgabe 4.3 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für eine kompakte Menge $K \subset \Omega$, $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definieren wir

$$p_{K,m}(f) := \sup_{|\alpha|\le m,\, x\in K} |\partial^\alpha f(x)|,$$

hierbei ist $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
Sei nun $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$ eine Folge von kompakten Teilmengen von Ω mit $\Omega = \bigcup_{j=0}^\infty K_j$. Zeigen Sie: Die Familie

$$\mathcal{H} := \{p_{K_j,m} : j, m \in \mathbb{N}_0\}$$

ist eine separierende Familie von Halbnormen auf $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 4.4 Für $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ definieren wir $\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(i) Zeigen Sie, dass $\big(\mathcal{C}^1([a,b], \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}\big)$ ein normierter Raum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $A\colon \mathcal{C}^1([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$ mit $f \longmapsto f'$ linear und stetig ist. Berechnen Sie schließlich

$$\|A\| := \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}^1}=1} \|Af\|.$$

Aufgabe 4.5 Es sei $E := \ell^2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle| \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$ und F der Untervektorraum

$$F = \{x \in E : x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Weiter sei F' ein algebraisches Komplement zu F in E, d.h. F' ist ein Untervektorraum von E mit $F + F' = E$ und $F \cap F' = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ für $x = y + y'$ mit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ und $y' \in F'$ wohldefiniert, linear und nicht stetig ist.

Abgabetermin: Montag 19. Mai 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.