Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

19. Mai 2008

Funktionalanalysis
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Es sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathbb{K}^n$ mit der Maximumsnorm

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|,$$

versehen, so ist die Einheitssphäre $S := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ kompakt.

(b) $(X, \|\cdot\|_X)$ ist homöomorph zu $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

(c) Je zwei Normen auf demselben endlich-dimensionalen Raum sind äquivalent.

Aufgabe 5.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Es existiert eine Folge $K_0 \subset K_1 \subset \ldots$ von kompakten Teilmengen von Ω mit $\Omega = \bigcup_{j=0}^\infty K_j$.

Aufgabe 5.3 Es sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Zu einem Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ sei

$$\|p\| := \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

(i) Zeigen Sie: $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum. Ist dieser ein Banachraum?

(ii) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T_i \colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind und ermitteln Sie $\|T_i\|$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$T_1(p) = \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t, \quad T_2(p) := p'(0), \quad T_3(p) := p'(1).$$

Aufgabe 5.4 Seien $h_1 := \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : (n\cdot\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ und $\mathring{h}_1 := \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in h_1 : \sum_{i=1}^\infty \xi_i = 0\}$. Zeigen Sie:

(i) Mit $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^\infty (j\cdot\xi_j)(j\cdot\eta_j)$ für $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus h_1 als Skalarprodukt ist h_1 ein Hilbertraum und $\mathring{h}_1$ ein abgeschlossener Teilraum.

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}\ \overset{1}{\exists}\, x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in h_1 : \Big(\forall y \in \mathring{h}_1 : \langle x, y\rangle = 0 \wedge \sum_{j=1}^\infty \xi_j = a\Big)$.

Abgabetermin: Montag 26. Mai 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.