Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

26. Mai 2008

Funktionalanalysis
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) $X \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}}$,

(ii) $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset \Longleftrightarrow \overline{X \setminus \overline{A}} = X$.

Aufgabe 6.2 Es seien X ein reflexiver normierter Raum und $M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie: M ist reflexiv.

Aufgabe 6.3 Seien $1 \leq p < \infty$ und $l^p := \left\{ x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall i \in \mathbb{N} : \xi_i \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \right\}$. Weiter sei

$$q := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{für} \quad p > 1, \\ \infty & \text{für} \quad p = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(\ell^p)'$ ist kongruent zu l^q.

Aufgabe 6.4 Zeigen Sie, dass keine Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ existieren kann, welche in allen rationalen Zahlen stetig und in allen irrationalen Zahlen unstetig ist.

Hinweis: Setzen Sie $S(f) := \{x \in [0,1] : f \text{ ist stetig in } x\}$. Zeigen Sie dann $S(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, wobei $O_n = \{x \in [0,1] : \exists \delta > 0 \forall y, y' \in B(x,\delta) : |f(y) - f(y')| < \frac{1}{n}\}$. Zeigen Sie nun mit Hilfe des Satzes von Baire die Behauptung.

Abgabetermin: Montag 02. Juni 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.