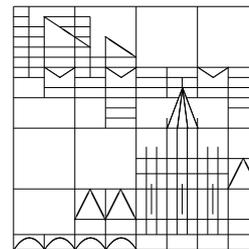


Universität Konstanz  
Fachbereich Mathematik und Statistik  
PROF. DR. REINHARD RACKE  
DIPL.-MATH. OLAF WEINMANN

2. Juni 2008



## Funktionalanalysis 7. Übungsblatt

**Aufgabe 7.1** Zeigen Sie, dass jeder Teilraum  $Y$  eines separablen metrischen Raumes  $X$  wieder separabel ist.

**Aufgabe 7.2** Zeigen Sie, dass im Satz von Banach & Steinhaus (Satz 7.5) nicht auf die Vollständigkeit von  $(X, \|\cdot\|)$  verzichtet werden kann. Betrachten Sie zum Beispiel

$$T_j: c_e \longrightarrow c_e, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (x_1, 2x_2, \dots, jx_j, 0, \dots) \quad (j \in \mathbb{N}).$$

**Aufgabe 7.3** Auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  seien zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  erklärt und bezüglich beider Normen sei  $X$  vollständig. Zeigen Sie: Existiert ein  $C > 0$  mit  $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$  für alle  $x \in X$ , so sind beide Normen äquivalent.

**Aufgabe 7.4** Seien  $X, Y$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Zeigen Sie:

(i) Ist  $K: X \longrightarrow Y$  eine Kongruenz, so ist  $K': Y' \longrightarrow X'$  eine Kongruenz.

(ii) Sind die Räume  $X$  und  $Y$  kongruent, so gilt:

$$X \text{ reflexiv} \implies Y \text{ reflexiv.}$$