Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

9. Juni 2008

Funktionalanalysis
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Seien X und Y Banachräume, $A\colon X \longrightarrow Y$ und $B\colon Y' \longrightarrow X'$ linear. Gilt für alle $x \in X$ und alle $y' \in Y'$

$$y'(Ax) = (By')(x),$$

dann sind A und B stetig.

Definition 8.2 *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $P_n(a,b)$ sei eine Partition $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*

(a) *$V(P_n(a,b)) := \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ heißt* ***Variation*** *von f bzgl. $P_n(a,b)$.*

(b) *Das Supremum aller Variationen*

$$V_a^b(f) := \sup_{P_n(a,b)} V(P_n(a,b)) \in [0, \infty]$$

heißt ***vollständige Variation*** *von f.*

(c) *Ist $V_a^b(f) < \infty$, so heißt f von* ***beschränkter Variation*** *oder $f \in \mathcal{BV}(a,b)$.*

Aufgabe 8.3 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

(i) $f \in \mathcal{BV}(a,b) \Longleftrightarrow \exists v, w$, monoton wachsend: $f = v - w$.

(ii) $f \in \mathcal{BV}(a,b) \Longrightarrow f$ besitzt nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Definition 8.4 *Die* ***schwache Topologie*** *eines Banachraumes X ist die Vektorraumtopologie, die von den Halbnormen*

$$p_f(x) := |f(x)|, \quad f \in X'$$

erzeugt wird (vgl. Aufgabe 3.6).

Aufgabe 8.5 Sei X ein unendlich dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie: Die schwache Topologie hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Die schwache Topologie ist die gröbste Topologie, in der alle $f \in X'$ stetig sind.

(ii) Jede im schwachen Sinn offene Menge ist unbeschränkt.

(iii) Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in der schwachen Topologie gegen ein $x \in X$, wenn

$$\forall f \in X' : \quad f(x_k) \to f(x)$$

gilt.

Aufgabe 8.6 Es sei $X := \mathcal{C}([a,b])$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in X$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \text{ und } \forall t \in [a,b] : x_n(t) \to x(t).$$

Abgabetermin: Montag 16. Juni 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.