Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

16. Juni 2008

Funktionalanalysis
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Es sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ sei abgeschlossen und konvex. Weiter sei $x_0 \in X \setminus M$. Zeigen Sie: Es existiert ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} x'x \leq \alpha \quad \text{für} \quad x \in M \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} x'x_0 > \alpha.$$

Aufgabe 9.2 Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ ein linearer Operator. Für $x, y \in D(A)$ sei $\langle x, y \rangle_A := \langle x, y \rangle + \langle Ax, Ay \rangle$. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn $(D(A), \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 9.3 Es seien E_ν, $\nu = 1, 2, 3$ Banachräume, $T\colon E_1 \longrightarrow E_2$ sei linear, $S\colon E_2 \longrightarrow E_3$ sei linear, injektiv und stetig. Schließlich sei $ST\colon E_1 \longrightarrow E_3$ stetig. Zeigen Sie, dass auch T stetig ist.

Aufgabe 9.4 Seien X normierter Raum und $A_j\colon D(A_j) \subset X \longrightarrow X$ $(j = 1, 2)$ abgeschlossene Abbildungen. Ist $A_1 + A_2\colon D(A_1) \cap D(A_2) \subset X \longrightarrow X$, $x \longmapsto A_1x + A_2x$ abgeschlossen?

Abgabetermin: Montag 23. Juni 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.