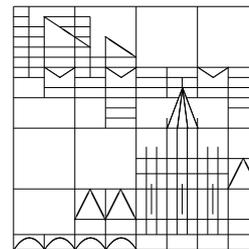


23. Oktober 2008



## Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1.1** Geben Sie  $m, l, k$  und die Funktion  $F: (x, (y_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq k}) \mapsto F(x, (y_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq k})$  aus Definition 1.2 der Vorlesung für folgende Differentialgleichungen an:

- (i)  $\partial_t u - \exp(|\nabla u|^6) \Delta u = 0, u: (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$
- (ii)  $\partial_{tt} u - \Delta u = |u|^{17}, u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$
- (iii)  $4\pi \operatorname{div} u = g, u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$

**Aufgabe 1.2** Finden Sie durch Raten eine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} u_y(x, y) + u_x(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Ist die Lösung eindeutig in  $C^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ ? Hängt die Lösung stetig von den Daten ab? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

HINWEIS: Betrachten Sie die Funktion  $t \mapsto u(x+t, y+t)$ , und zeigen Sie, dass die Gleichung für  $u_0 = 0$  eindeutig lösbar ist.

**Aufgabe 1.3** Seien  $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}, \alpha_2 \neq 0, u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $f \in C(\mathbb{R}^2)$ . Geben Sie die allgemeine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y &= \beta u + f, \\ u|_\Gamma &= u_0 \end{aligned}$$

an, wobei  $\Gamma := \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ .