Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

23. Oktober 2008

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Geben Sie m, l, k und die Funktion $F\colon (x, (y_\alpha)_{0\le|\alpha|\le k}) \longmapsto F(x, (y_\alpha)_{0\le|\alpha|\le k})$ aus Definition 1.2 der Vorlesung für folgende Differentialgleichungen an:

(*i*) $\partial_t u - \exp(|\nabla u|^6)\Delta u = 0$, $u\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

(*ii*) $\partial_{tt} u - \Delta u = |u|^{17}$, $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

(*iii*) $4\pi \mathrm{div} u = g$, $u\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.2 Finden Sie durch Raten eine Lösung der Differentialgleichung

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_y(x,y) + u_x(x,y) &=& 0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &=& u_0(x), & x\in\mathbb{R}\ , \end{array}\right.$$

wobei $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Ist die Lösung eindeutig in $C^1(\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$? Hängt die Lösung stetig von den Daten ab? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto u(x+t, y+t)$, und zeigen Sie, dass die Gleichung für $u_0 = 0$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 1.3 Seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \neq 0$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Geben Sie die allgemeine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y &=& \beta u + f, \\ u|_\Gamma &=& u_0 \end{array}$$

an, wobei $\Gamma := \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$.

Abgabetermin: Donnerstag 30. Oktober 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.