Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

12. November 2008

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Es sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Ferner sei $f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(n!\varphi) \text{ für } \varphi \in [0,2\pi]$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) Es gilt: $f \in \mathcal{C}([0,2\pi])$.

(ii) Die Funktion u, welche für $(r,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi)$ (in Polarkoordinaten) durch

$$u(r,\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} r^{n!} n^{-2} \sin(n!\varphi)$$

gegeben ist, löst die Dirichletsche Randwertaufgabe:

$$\Delta u = 0 \text{ in } G, \quad u\,|_{\partial G} = f, \quad u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}).$$

(iii) Es gilt: $\int_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \infty$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Gestalt $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}$ hat.

Aufgabe 4.2 Finden Sie eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= \Delta u(x,t) \text{ für } (t,x) \in \mathbb{R}^4, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= \|x\|^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz $u(x,t) \equiv v(\|x\|,t)$. Betrachten Sie dann $w(s,t) := sv(s,t)$.

Aufgabe 4.3 Finden Sie eine Grundlösung für Δ in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie Ihre Aussage.

Abgabetermin: Donnerstag 19. November 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.