Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

19. November 2008

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Es sei $l > 0$ und $\Omega := (0, l)$. Weiter seien a und b positive reelle Konstanten und u_0, u_1, sowie θ_0 vorgegebene, auf Ω definierte, glatte Funktionen. Gegeben seien glatte Lösungen $u = u(t, x)$ und $\theta = \theta(t, x)$ zu dem Anfangs-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - au_{xx} + b\theta_x &= 0, \\ \theta_t - \theta_{xx} + bu_{tx} &= 0 \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \overline{\Omega} \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \qquad u_t(0, x) = u_1(x), \qquad \theta(0, x) = \theta_0(x) \qquad (x \in \overline{\Omega})$$

und den Randbedingungen

$$u(t, x) = \theta(t, x) = 0, \quad x \in \{0, l\}, \ t \geq 0.$$

Definieren Sie $V := (au_x, u_t, \theta)'$ und finden Sie einen Differentialoperator A, so dass $V_t = AV$ gilt. Wie muss V_0 aussehen, damit $V(0, \cdot) = V_0(\cdot)$ gilt? Zeigen Sie dann, dass die „Energie" $E(t) := \int_\Omega (u_t^2 + au_x^2 + b\theta^2)(t, x)\mathrm{d}x$ abklingt, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leq 0$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 5.2

(*i*) Es sei $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, T])$ mit $\varphi(t) \geq 0$ für $t \in [0, T]$. Weiter gelte: $\exists C \in \mathbb{R} : \ \varphi'(t) \leq C\varphi(t)$ für $t \in [0, T]$. Zeigen Sie, dass dann $\varphi(t) \leq e^{Ct}\varphi(0)$ gilt.

(*ii*) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $T > 0$. Weiter seien $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, f' beschränkt und $u_0 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ mit $u_0 = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u), & (t, x) &\in [0, T] \times \overline{\Omega}, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in \overline{\Omega}, \\ u(t, x) &= 0, & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine klassische Lösung besitzt.

Aufgabe 5.3 Es sei $u_0(x) := e^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Weiter sei $G(t, x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ für $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Sei ausserdem $u(t) := G(t, \cdot) * u_0$. Berechnen Sie u und zeigen Sie, dass $u \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ gilt und dass u die Wärmeleitungsgleichung

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u\,|_{t=0} &= u_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}. \end{aligned} \right.$$

löst mit $u(t, \cdot) \to u_0(\cdot)$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $t \to 0$.

Abgabetermin: Donnerstag 26. November 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.