Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

27. November 2008

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Betrachten Sie die Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - i\Delta u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(*i*) Ist $u = u_1 + iu_2$ eine glatte Lösung von (1), so erfüllen die (reellen) Funktionen u_1 und u_2 die Plattengleichung

$$\partial_t^2 v(t,x) + \Delta^2 v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

(*ii*) Ist v eine glatte Lösung von (2), so erfüllt $u := v_t + i\Delta v$ die Gleichung (1).

Aufgabe 6.2 Finden Sie eine Lösung der Plattengleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v(t,x) + \Delta^2 v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}, \\ v_t(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hinweis: Aufgabe 6.1 und Aufgabe 5.3.

Aufgabe 6.3 Es sei $n \geq 2$ und $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die durch die Gleichung $a_0 t + \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ beschriebene Ebene, wobei $a_0^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 < 0$ sei. Man zeige, dass beim Cauchyproblem

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u\,|_S = \varphi, \quad \left(a_0 u_t + \sum_{k=1}^n a_k u_{x_k} \right)\Bigg|_S = \psi$$

keine stetige Abhängigkeit von den Daten gegeben ist.
Hinweis: Betrachten Sie den Ansatz: $u(x,t) := \exp\left(m\left(i\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k + a_0 t + \sum_{k=1}^n a_k x_k\right)\right)$.

Abgabetermin: Donnerstag 4. Dezember 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.