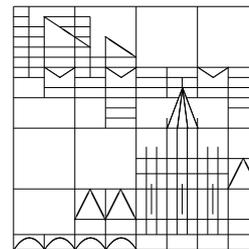


4. Dezember 2008



Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen 7. Übungsblatt

Satz 7.1 (1. Poincarésche Ungleichung) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gilt:*

$$\exists d > 0 : \forall u \in H_0^1(G) : \|u\|_{L^2} \leq d \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Satz 7.2 (2. Poincarésche Ungleichung) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann gilt:*

$$\exists c > 0 : \forall u \in H^1(G) : \|u\|_{L^2} \leq c \left(\|\nabla u\|_{L^2} + \left| \int_G u \, dx \right| \right).$$

Aufgabe 7.3 Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Weiter sei $g \in H^1(G)$ gegeben. Für $u, v \in H^1(G)$ definieren wir

$$\langle u, v \rangle_* := \int_G \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) \, dx + \int_G u(x) \, dx \cdot \int_G \bar{v}(x) \, dx.$$

Betrachten Sie das klassisch formulierte Randwertproblem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x) = 0, \quad x \in G \\ u|_{\partial G} = g|_{\partial G} \end{array} \right\} \quad (1)$$

- (i) Zeigen Sie, dass $(H^1(G), \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$ ein Hilbertraum ist und dass $H_0^1(G) + \text{span} \{1\} \subset H^1(G)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. (Verwenden Sie Satz 7.1 und Satz 7.2.)
- (ii) Formulieren Sie die klassische Aufgabe (1) in eine Aufgabe für schwache Lösungen um. Lösen Sie schließlich das entstandene Problem unter Verwendung von (i).