Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

4. Dezember 2008

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
7. Übungsblatt

Satz 7.1 (1. Poincarésche Ungleichung) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gilt:*

$$\exists d > 0: \ \forall u \in H_0^1(G): \ \|u\|_{L^2} \leq d \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Satz 7.2 (2. Poincarésche Ungleichung) *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Dann gilt:*

$$\exists c > 0: \ \forall u \in H^1(G): \ \|u\|_{L^2} \leq c \left(\|\nabla u\|_{L^2} + \left| \int_G u \,\mathrm{d}x \right| \right).$$

Aufgabe 7.3 Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Weiter sei $g \in H^1(G)$ gegeben. Für $u, v \in H^1(G)$ definieren wir

$$\langle u, v \rangle_* := \int_G \nabla u(x) \nabla \overline{v}(x) \mathrm{d}x + \int_G u(x) \mathrm{d}x \cdot \int_G \overline{v}(x) \mathrm{d}x.$$

Betrachten Sie das klassisch formulierte Randwertproblem:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x) & = & 0, & x \in G \\ u \,|_{\partial G} & = & g \,|_{\partial G} \,. & \end{array} \right\} \tag{1}$$

(*i*) Zeigen Sie, dass $\left(H^1(G), \langle \cdot, \cdot \rangle_*\right)$ ein Hilbertraum ist und dass $H_0^1(G) + \mathrm{span}\,\{1\} \subset H^1(G)$ ein abgeschlossener Unterraum ist. (Verwenden Sie Satz 7.1 und Satz 7.2.)

(*ii*) Formulieren Sie die klassische Aufgabe (1) in eine Aufgabe für schwache Lösungen um. Lösen Sie schließlich das entstandene Problem unter Verwendung von (*i*).

Abgabetermin: Donnerstag 11. Dezember 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.