Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 0: Präsenzaufgaben

Aufgabe 0.1.

Definieren Sie die folgenden Begriffe:

- Gruppe
- Ring mit 1
- kommutativer Ring mit 1
- Körper

Aufgabe 0.2.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Definieren Sie die Gruppe S_n.
- Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen isomorph zueinander sind:
  $(S_2, \circ)$, $(\mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_3^\times, \cdot)$.

Aufgabe 0.3.

Sei K ein Körper.

- Definieren Sie, was es bedeutet, dass ein Polynom $f \in K[x]$ reduzibel ist.
- Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und seien $a, b \in K$. Zeigen Sie, dass das Polynom

  $$f(x) = x^2 + 2ax + b$$

  genau dann eine Nullstelle besitzt, wenn es $\alpha \in K$ mit $\alpha^2 = a^2 - b$ gibt. Zeigen Sie zudem, dass dann

  $$f(x) = (x + a - \alpha)(x + a + \alpha)$$

  gilt.

  Lösung: Quadratische Ergänzung.

- Finden Sie die Nullstellen von $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
- Zeigen Sie, dass ein Polynom $f \in K[x]$ mit $\deg(f) = 3$ genau dann reduzibel ist, wenn es eine Nullstelle besitzt.
- Finden Sie ein reduzibles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(f) = 4$ ohne Nullstelle.

  Z.B. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$.

Aufgabe 0.4.

- Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Definieren Sie, was es bedeutet, dass I ein Ideal von R ist.
- Zeigen Sie, dass jeder Körper nullteilerfrei ist.
- Sei K ein Körper und sei $I \lhd R$. Zeigen Sie, dass $I = \{0\}$ oder $I = K$ sein muss.

Aufgabe 0.5.

- Sei K ein Körper. Definieren Sie den Begriff eines Teilkörpers von K.
- Welche der folgenden Körper sind Teilkörper von welchen anderen?

  $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{F}_2(t)$.