Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 1

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die frewillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1.1. (Ringe, Ideale und Äquivalenzrelationen) (3+1 Punkte)

(a) Sei $I \lhd R$ ein echtes Ideal. Die Relation $\sim$ auf R wird dadurch definiert, dass genau dann $x \sim y$, wenn $x - y \in I$. Zeigen Sie:

- (i) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf R.
- (ii) Die Verknüpfungen $(x+I)+(y+I) := (x+y)+I$ und $(x+I)\cdot(y+I) := (xy)+I$ auf R/I sind wohldefiniert. (*Wie im Skript bezeichnet dabei $x+I$ die Äquivalenzklasse $[x]$ von x.*)
- (iii) $(R/I, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

(b) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(*Hinweis: Sei $a \in R \setminus \{0\}$ beliebig. Betrachten Sie die Menge $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*)

Aufgabe 1.2. (Eulersche Phi-Funktion) (3+1 Punkte)

Sei φ die eulersche Phi-Funktion.

(a) Zeigen Sie:

- (i) Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
- (ii) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$ gilt $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
- (iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n,\ p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(b) Geben Sie ein Beispiel für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(ab) \neq \varphi(a)\varphi(b)$ an.

Aufgabe 1.3. (Faktorring) (1+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-1\rangle$ kein Integerring ist.
(*Hierbei ist* $\langle x^2-1\rangle$ *das Hauptideal* $(x^2-1)\mathbb{Q}[x]$ *von* $\mathbb{Q}[x]$.)

(ii) Wir definieren die Ringoperationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}^2$ koordinatenweise durch

$$(r_1, r_2) + (s_1, s_2) := (r_1 + s_1, r_2 + s_2) \text{ und } (r_1, r_2) \cdot (s_1, s_2) := (r_1 s_1, r_2 s_2)$$

für alle $(r_1, r_2), (s_1, s_2) \in \mathbb{Q}^2$. Zeigen Sie, dass die Ringisomorphie

$$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2-1\rangle \simeq \mathbb{Q}^2$$

gilt. (*Sie müssen nicht nachweisen, dass* $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ *ein Ring ist.*)

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Rechnen mit Idealen) (2+1+1 Punkte)

(a) Seien $I, J \lhd R$. Zeigen Sie:

(i) $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ ist das kleinste Ideal von R, das $I \cup J$ enthält.

(ii) $IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$ ist ein Ideal von R, welches in $I \cap J$ enthalten ist. Geben Sie ein Beispiel für R, I und J an, sodass $IJ \neq I \cap J$.

(b) Sei $\mathcal{I}$ eine Indexmenge und sei I_i für jedes $i \in \mathcal{I}$ ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} I_i$ auch ein Ideal von R ist.

(c) Finden Sie ein Beispiel für R, I_1 und I_2 mit $I_1, I_2 \lhd R$, sodass $I_1 \cup I_2$ kein Ideal von R ist.

Abgabe: Montag, den 4. November 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.