Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 2

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die frewillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 2.1. (Radikalideal) (2+2 Punkte)
Seien $I, J \lhd R$. *Erinnerung (Blatt 1): Es ist* $IJ := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$.
Nun definieren wir induktiv $I^1 := I$ und $I^{n+1} := II^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass I^n ein Ideal von R ist und dass $I^n \subseteq I$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I} := \{a \in R \mid a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 2.2. (Lemma von Zorn) (2+2 Punkte)
Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein echtes Ideal $I \lhd R$, welches maximal mit der Eigenschaft $S \cap I = \emptyset$ ist.
(Dies bedeutet nicht, dass I ein maximales Ideal ist. Siehe hierzu Übungsblatt 3.)

(b) Jedes solche Ideal aus (a) ist prim.

Aufgabe 2.3. (Chinesischer Reste-Satz) (1+1+2 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$a \equiv b \mod n,$$

falls $a - b \in n\mathbb{Z}$ gilt.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $n_1, \ldots, n_k, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für alle $i \neq j$.

(i) Zeigen Sie, dass es $x_0 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$x_0 \equiv a_i \mod n_i.$$

(ii) Zeigen Sie, dass x_0 aus (i) eindeutig modulo $n_1 n_2 \ldots n_k$ ist, also dass für jedes $y \in \mathbb{Z}$ mit $y \equiv a_i \mod n_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$y \equiv x_0 \mod n_1 n_2 \ldots n_k.$$

(Hinweis: Wenden Sie den Chinesischen Reste-Satz auf geeignete Ideale von $\mathbb{Z}$ an.)

(b) Finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, für die

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3, \\ x &\equiv 4 \mod 25 \text{ und} \\ x &\equiv 9 \mod 14 \end{aligned}$$

gelten.

(Hinweis: Finden Sie zunächst ein spezielles $x_0 \in \mathbb{Z}$, das alle drei Bedingungen erfüllt.)

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Teil- und Faktorringe) (2+2 Punkte)

Sei $I \lhd R$ und sei $\pi\colon R \to R/I, x \mapsto x + I$ die kanonische Projektion.

(a) Sei $\mathcal{T}$ die Menge der Teilringe von R, die I enthalten, und sei $\mathcal{T}_I$ die Menge der Teilringe von R/I. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{T} &\to \mathcal{T}_I, \\ S &\mapsto \pi(S) \end{aligned}$$

bijektiv und inklusionserhaltend (d.h. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \pi(S_1) \subseteq \pi(S_2)$) ist.

(b) Sei $\mathcal{I}$ die Menge der Ideale von R, die I enthalten, und sei $\mathcal{I}_I$ die Menge der Ideale von R/I. Setze $\rho := \psi|_{\mathcal{I}}$. Zeigen Sie, dass $\rho(\mathcal{I}) = \mathcal{I}_I$ ist.

(Damit haben Sie gezeigt, dass ρ eine bijektive Abbildung von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{I}_I$ ist.)

Abgabe: Montag, den 11. November 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.