Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 3

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 3.1 (Lemma von Zorn) (3+1 Punkte)

Sei K ein Körper und sei V ein beliebiger K-Vektorraum.
(*Beachten Sie: V kann auch unendliche Dimension haben.*)

(a) Zeigen Sie, dass V eine maximale linear unabhängige Teilmenge enthält.
(*Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Zorn.*)

(b) Folgern Sie, dass V eine Basis besitzt.

Aufgabe 3.2. (Maximale Ideale und Primideale) (1+1+2 Punkte)

(a) Sei P ein Primideal von R und setze $S = R \setminus P$.

  (i) Zeigen Sie, dass S eine multiplikative Teilmenge von R mit $0 \notin S$ ist.

  (ii) Sei $I \lhd R$ ein echtes Ideal, welches maximal mit der Eigenschaft $S \cap I = \emptyset$ ist. Zeigen Sie, dass dann schon $I = P$ gilt.

(b) Wir definieren $\mathbb{Z}[x,y] := \mathbb{Z}[x][y]$. Finden Sie ein Primideal $P \neq \{0\}$ von $\mathbb{Z}[x,y]$, das nicht maximal ist.

(*Damit ist das zu P gehörige Ideal $I \lhd \mathbb{Z}[x,y]$, das in* (a)(ii) *beschrieben wird, nicht maximal. Vergleiche Aufgabe 2.2.*)

Aufgabe 3.3. (Euklidischer Ring) (4 Punkte)

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \left\{n + m\mathrm{i}\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{C}$ und den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) := \left\{r + s\mathrm{i}\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\right\} \subseteq \mathbb{C}$. Wir definieren die Norm $N(r + s\mathrm{i}\sqrt{2}) := r^2 + 2s^2$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$.

(i) Zeigen Sie, dass N multiplikativ ist, d.h. für alle $a, b \in K$ gilt $N(ab) = N(a)N(b)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $K = \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R ist, d.h. für alle $a \in K$ gibt es $b, c \in R$ mit $a = \frac{b}{c}$.

(iii) Zeigen Sie, dass es für alle $a, b \in R$ ein $c \in R$ mit $N(\frac{a}{b} - c) < 1$ gibt.

(iv) Folgern Sie, dass (R, N) ein euklidischer Integritätsbereich ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Ideale im Polynomring) (4 Punkte)

Für $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne f' die formale Ableitung von f. Welche der folgenden Mengen I_k sind Ideale von $\mathbb{R}[x]$?

(i) $I_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(2) = 0\}$

(ii) $I_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f'(-2) = 0\}$

(iii) $I_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(2) = f(3) = 0\}$

(iv) $I_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1) = f'(1) = 0\}$

Finden Sie für die I_k, welche Ideale von $\mathbb{R}[x]$ sind, ein Polynom $f_k \in \mathbb{R}[x]$, das I_k erzeugt.

Abgabe: Montag, den 18. November 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.