
Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 4

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Aufgabe 4.1. (Hauptideale) (2 + 2 Punkte)

- (i) Sei $I \triangleleft \mathbb{Z}[x]$. Angenommen, es existiert ein normiertes Polynom $f \in I$, sodass für alle $h \in I \setminus \{0\}$ bereits $\deg(f) \leq \deg(h)$ gilt. Zeigen Sie, dass I ein Hauptideal ist.
- (ii) Finden Sie ein Ideal von $\mathbb{Z}[x]$, das kein Hauptideal ist.

Aufgabe 4.2. (Lemma von Gauß) (2 + 2 Punkte)

- (i) Sei $R \neq \{0\}$ ein Integerring und sei $F = \text{Quot}(R)$. Angenommen, es existieren ein normiertes Polynom $p \in R[x]$ und zwei nicht-konstante normierte Polynome $A, B \in F[x]$, sodass $p = AB$ und $A \notin R[x]$. Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.
- (ii) Folgern Sie aus (i), dass $\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$ nicht faktoriell ist. (*Hinweis: Betrachten Sie $x^2 - 2$.*)

Aufgabe 4.3. (Irreduzible Polynome) (1 + 3 Punkte)

- (a) Erstellen Sie die Liste aller irreduziblen Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{F}_2[x]$.
- (b) Bestimmen Sie, ob folgende Polynome in $\mathbb{F}_2[x]$ irreduzibel sind. Falls nicht, geben Sie ihre Primfaktorzerlegung an.
- (i) $x^4 + x^2 + 1$
- (ii) $x^4 + 1$
- (iii) $x^4 + x + 1$

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Nicht faktorieller Ring)

(2 + 1 + 1 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ und $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Wir setzen $\gamma_n = i\sqrt{n} \in \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\gamma_n]^\times = \{1, -1\}$ gilt und dass 2 und γ_n irreduzibel in $\mathbb{Z}[\gamma_n]$ sind.

(Hinweis: Betrachten Sie die multiplikative Norm $N: z \mapsto |z|^2$ auf $\mathbb{Z}[\gamma_n]$; vgl. Aufgabe 3.3. Hierbei bezeichnet $|z|$ den Betrag von z .)

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\gamma_6]$ nicht faktoriell ist.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass γ_6 nicht prim in $\mathbb{Z}[\gamma_6]$ ist.)

(iii) Zeigen Sie, dass das Ideal $\langle 2, \gamma_6 \rangle$ in $\mathbb{Z}[\gamma_6]$ kein Hauptideal ist.

Abgabe: Montag, den 25. November 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.