

---

**Übungen zur Vorlesung Algebra I**  
**Blatt 5**

**Allgemeiner Hinweis:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

**Aufgabe 5.1.** (Irreduzibilitätskriterien I) (4 Punkte)

Zeigen Sie (mit so wenig Rechenaufwand wie möglich), dass folgende Polynome irreduzibel sind:

(i)  $x^3 + 14x^2 + 7x + 23$  in  $\mathbb{Q}[x]$

(ii)  $x^9 + 10x^7 + 55x^6 - 100x^2 + 20$  in  $\mathbb{Q}[x]$

(iii)  $4x^3 + 12x^2 + 20$  in  $\mathbb{Q}[x]$

(iv)  $x^2y^2 + x^3 - x^2 - y + 1$  in  $\mathbb{Q}[x, y]$

(Hinweis: Betrachten Sie das Polynom in  $\mathbb{Q}[y][x]$ .)

**Aufgabe 5.2.** (Irreduzibilitätskriterien II) (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie (mit so wenig Rechenaufwand wie möglich), dass folgende Polynome irreduzibel sind:

(i)  $x^5 + 21x^4 + 39x^3 - 15x + 15$  in  $\mathbb{Z}[x]$

(ii)  $x^3 + 5x^2 + 27x + 22$  in  $\mathbb{Z}[x]$

(b) Sei  $f(x) = 4x^2 + 2$ . Entscheiden Sie jeweils, ob  $f$  in  $\mathbb{Z}[x]$  bzw. in  $\mathbb{Q}[x]$  irreduzibel ist.

**Aufgabe 5.3.** (Primfaktorzerlegung) (1+1+2 Punkte)

(a) Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Zeigen Sie, dass das Polynom  $x^4 - p$  reduzibel in  $\mathbb{R}[x]$  aber irreduzibel in  $\mathbb{Q}[x]$  ist.

(b) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von  $x^{2n} + 2x^n + 1$  in  $\mathbb{R}[x]$  für  $n = 2$  und  $n = 3$ .

(c) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von  $x^4 + 1$  in  $\mathbb{R}[x]$  und in  $\mathbb{Q}[x]$ .

**Zusatzaufgabe für Interessierte.**

(1+3 Punkte)

Betrachten Sie erneut den Ring  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  aus Aufgabe 3.3.

- (i) Zeigen Sie, dass  $1 - i\sqrt{2}$  irreduzibel in  $R$  ist.
- (ii) Sei  $f(x) = x^5 + 6x^3 + 9x + 1 - i\sqrt{2}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  irreduzibel in  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})[x]$  ist.  
(Hinweis: Wenden Sie das Lemma von Gauß an.)

**Abgabe:** Montag, den 2. Dezember 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre\*r Tutor\*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre\*r Tutor\*in.