
Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 6

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Aufgabe 6.1 (Einfache algebraische Körpererweiterung) (1 + 2 + 1 Punkte)

Sei $p(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass p irreduzibel über \mathbb{Q} ist.

Sei nun θ eine Nullstelle von p in einer Körpererweiterung von \mathbb{Q} .

(b) Schreiben Sie $(\theta^2 - 1)^{-1}$ und θ^5 als Linearkombination von 1 , θ und θ^2 über \mathbb{Q} .

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\theta^2 - 1)$ gilt.

Aufgabe 6.2 (Erweiterungsgrade) (2 + 2 Punkte)

Sei L/K eine Körpererweiterung.

(a) Sei $[L : K] = p$ mit $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in L \setminus K$ gilt $K(\alpha) = L$.

(b) Sei $[L : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $f \in K[x]$ mit $\deg(f) = 3$ ein Polynom, welches eine Nullstelle in L hat. Zeigen Sie, dass f dann bereits eine Nullstelle in K hat.

Aufgabe 6.3 (Minimalpolynome) (2 + 2 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

(a) Ermitteln Sie die Minimalpolynome $m_{\alpha, \mathbb{Q}}$ und $m_{\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{2})}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ gilt.

Zusatzaufgabe für Interessierte.

(2 + 2 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $p \in K[x]$ irreduzibel. Sei ferner $n = \deg(p)$ und α eine Nullstelle von p in einer Körpererweiterung von K . Zeigen Sie:

- (i) Ist n ungerade, dann gilt $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Folgerung in (i) im Allgemeinen nicht gilt, wenn n gerade ist.

Glühwein | Snacks | Unterhaltung

Weihnachtsfeier

des Fachbereichs Mathematik und Statistik

11. Dezember
Ab 18:30 Uhr
in Raum G201

Bitte eigene Tasse mitbringen!

Abgabe: Montag, den 9. Dezember 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.