Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 7

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Aufgabe 7.1. (Einfache Erweiterungen) (2+2 Punkte)

Sei K/F eine Körpererweiterung. Für ein $\alpha \in K$ bezeichnet $F[\alpha]$ den von α über F erzeugten Teilring von K (also den kleinsten Teilring von K, der F und α enthält) und $F(\alpha)$ den von α über F erzeugten Teilkörper von K (also den kleinsten Teilkörper von F, der F und α enthält).

(a) Sei $\alpha \in K$ algebraisch über F. Zeigen Sie, dass

$$F[\alpha] = \{p(\alpha) \mid p \in F[x]\}$$

ein Teilkörper von K ist. Folgern Sie, dass $F[\alpha] = F(\alpha)$ gilt.

(b) Sei $a \in K$ transzendent über F. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus zwischen den Ringen $F[x]$ und $F[\alpha]$ gibt, der die Variable x auf das Element α abbildet. Folgern Sie, dass der Körper $F(\alpha)$ isomorph zu $F(x)$ ist.

Aufgabe 7.2. (Algebraischer Abschluss) (2+1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendliche Kardinalität besitzt.

(b) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Primkörper F. Zeigen Sie, dass $[K : F]$ unendlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ unendlich ist.

Aufgabe 7.3. (Frobeniushomomorphismus) (2+2 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) = p$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in K$ die Gleichung $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\sigma_n \colon K \to K, a \mapsto a^{p^n}$ einen Homomorphismus definiert.

(Die Abbildung σ_1 wird als Frobeniushomomorphismus bezeichnet.)

Zusatzaufgabe für Interessierte. (4 Punkte)

Sei K/F eine Körpererweiterung und $\alpha \in K$ transzendent über F. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ ist auch α^n transzendent über F, und es gilt $[F(\alpha) : F(\alpha^n)] = n$.

Abgabe: Montag, den 16. Dezember 2024, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.