Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 8

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Hinweis von Frau Prof. Dr. Kuhlmann: Wir haben von den Tutor*innen erfahren, dass bei den Übungsblättern leider häufig abgeschrieben wird. Wir möchten Sie ausdrücklich davor warnen und Sie bitten, die Aufgaben eigenständig zu bearbeiten. Das eigenständige Lösen der Aufgaben ist eine wichtige Vorbereitung auf die Klausur, in der keine Möglichkeit zum Abschreiben bestehen wird. Nutzen Sie diese Gelegenheit, um sich mit dem Stoff der Vorlesung auseinanderzusetzen und ein ehrliches Feedback zu Ihrem Lernfortschritt zu erhalten. Abschreiben hingegen bedeutet, dass Sie sich diese wertvolle Chance entgehen lassen.

Aufgabe 8.1. (Separabilität) (4 Punkte)

Bestimmen Sie, ob folgende Polynome separabel sind:

(i) $x^2 - 6x + 9$ in $\mathbb{Q}[x]$,

(ii) $x^{60} + x^{30} + 1$ in $\mathbb{F}_2[x]$,

(iii) $x^5 + tx + t$ in $\mathbb{F}_5(t)[x]$,

(iv) $x^4 + 6x^3 - 22x^2 + 7x - 15015$ in $\mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 8.2. (Separabilität über perfekten Körpern) (2+2 Punkte)

Sei F ein perfekter Körper. Zeigen Sie:

(i) Jedes irreduzible Polynom $f \in F[x]$ ist separabel.

(ii) Ein Polynom $f \in F[x]$ mit $\deg f \geq 1$ ist genau dann separabel, wenn die Primfaktorisierung von f in $F[x]$ die folgende Gestalt hat:

$$f = c \prod_{i=1}^{k} p_i,$$

wobei $c \in F^\times$ und $p_i \in F[x]$ normiert und irreduzibel sowie $p_i \neq p_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

Aufgabe 8.3. (Beweisschritte aus Skript 12) (2+2 Punkte)

Sei F ein Körper, sei I eine beliebige Menge und sei $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ eine endliche Teilmenge von I. Wir definieren $F[x_j \mid j \in J]$ als den Polynomring $F[x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}]$, also den Polynomring über F in den Variablen $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$. Weiterhin sei

$$F[x_i \mid i \in I] := \bigcup_{J \subseteq I \text{ endlich}} F[x_j \mid j \in J].$$

Finden Sie geeignete Operationen $+$ und $\cdot$ auf $F[x_i \mid i \in I]$, sodass $(F[x_i \mid i \in I], +, \cdot)$ ein Ring ist, der $F[x_j \mid j \in J]$ für jedes endliche $J \subseteq I$ als Teilring hat.

(Im Hauptsatz von Skript 12 ist der Polynomring $F[\cdots, x_f, \cdots]$ durch $F[x_i \mid i \in I]$ für die Menge $I = F[x]$ gegeben.)

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Algebraische Zahlen) (4 Punkte)

Es bezeichne $\widetilde{\mathbb{Q}}$ den Körper der algebraischen Zahlen und $\widetilde{\mathbb{Q}}^r$ den Körper der reellen algebraischen Zahlen. Zeigen Sie:

(i) $[\widetilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = [\widetilde{\mathbb{Q}}^r : \mathbb{Q}] = \aleph_0$.

(ii) $|\widetilde{\mathbb{Q}}| = |\widetilde{\mathbb{Q}}^r| = \aleph_0$.

(iii) $|\mathbb{C} \setminus \widetilde{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R} \setminus \widetilde{\mathbb{Q}}^r| = 2^{\aleph_0}$.

(Hierbei bezeichnet $\aleph_0$ die Kardinalität von $\mathbb{N}$ und $2^{\aleph_0}$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$.)

Frohe Weihnachten!

Abgabe: Dienstag, den 7. Januar 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.