

---

**Übungen zur Vorlesung *Algebra I***  
**Blatt 9**

**Allgemeiner Hinweis:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

**Aufgabe 9.1.** (Ordnung I) (3+1 Punkte)

Sei  $G$  eine Gruppe, sei  $x \in G$  und sei  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

(a) Zeigen Sie:

- (i) Aus  $|x| = \infty$  folgt  $|x^j| = \infty$ .
- (ii) Aus  $|x| = n < \infty$  folgt  $|x^j| = \frac{n}{\text{ggT}(n,j)}$ .
- (iii) Aus  $|x| = n < \infty$  und  $j \mid n$  folgt  $|x^j| = \frac{n}{|j|}$ .

(b) Sei  $|x| = \infty$ . Zeigen Sie, dass  $x^j$  genau dann ein Erzeuger von  $\langle x \rangle$  ist, wenn  $j \in \{-1, 1\}$ .

**Aufgabe 9.2.** (Zyklische Gruppen) (1+1+2 Punkte)

Sind die folgenden additiven Gruppen zyklisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (i)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ,
- (ii)  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (iii)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 9.3.** (Satz von Lagrange) (2+2 Punkte)

- (i) Zeigen Sie, dass  $A_4$  keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.  
(Hinweis: *Bemerke, dass solch eine Gruppe einen 3-Zykel enthalten würde.*)
- (ii) Finden Sie alle Untergruppen von  $A_4$ . Welche davon sind normal?

**Zusatzaufgabe für Interessierte.** (Ordnung II)

(4 Punkte)

Sei  $G$  eine (nicht notwendigerweise abelsche) endliche Gruppe und seien  $x, y \in G$ . Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe eines Gegenbeispiels jeweils die folgenden Aussagen:

- (i)  $|xy|$  ist ein Teiler von  $\text{kgV}(|x|, |y|)$ .
- (ii) Falls  $xy = yx$ , dann ist  $|xy|$  ein Teiler von  $\text{kgV}(|x|, |y|)$ .
- (iii) Es gilt  $|xy| = \text{kgV}(|x|, |y|)$ .

**Abgabe:** Montag, den 13. Januar 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre\*r Tutor\*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre\*r Tutor\*in.