Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 10

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Aufgabe 10.1. (Normale Untergruppen) (4+2 Punkte)
Sei G eine Gruppe und sei $H \leq G$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind:

  (i) $H \trianglelefteq G$.
  (ii) $N_G(H) = G$.
  (iii) Für alle $g \in G$ gilt $gH = Hg$.
  (iv) Die Verknüpfung $(uH, vH) \mapsto (uv)H$ definiert eine Gruppenoperation auf der Menge der linken Nebenklassen von H.

(b) (i) Zeigen Sie, dass $N_G(H)$ eine Teilgruppe von G mit $H \trianglelefteq N_G(H)$ ist.
  (ii) Sei $B \leq G$ mit $H \leq B$. Zeigen Sie, dass genau dann $H \trianglelefteq B$ gilt, wenn B eine Teilgruppe von $N_G(H)$ ist.

  (Damit ist $N_G(H)$ die größte Teilgruppe von G, in der H normal ist.)

Aufgabe 10.2. (Verband-Isomorphismus) (2+4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und sei $N \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe von G. Sei $\varphi\colon G \to G/N$ die kanonische Projektion. Falls $A \leq G$ und $N \leq A$, so schreiben wir $\overline{A} := A/N$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ^* gegeben durch

$$\varphi^*\colon A \mapsto \varphi(A) = \overline{A}$$

eine bijektive Abbildung von der Menge der Untergruppen von G, die N enthalten, in die Menge der Untergruppen von G/N ist.

(b) Seien $A, B \leq G$ mit $N \leq A$ und $N \leq B$. Zeigen Sie den *Satz des Verband-Isomorphismus*:

(i) Genau dann gilt $A \leq B$, wenn $\overline{A} \leq \overline{B}$. In diesem Fall folgt $[B : A] = [\overline{B} : \overline{A}]$.

(ii) Genau dann gilt $A \trianglelefteq B$, wenn $\overline{A} \trianglelefteq \overline{B}$. In diesem Fall gilt $B/A \cong \overline{B}/\overline{A}$.

(iii) $\overline{\langle A \cup B \rangle} = \langle \overline{A} \cup \overline{B} \rangle$.

(iv) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Diedergruppe) (4 Punkte)

Sein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Die n-te *Diedergruppe* D_n ist die Symmetriegruppe aller Drehungen und Spiegelungen eines regulären n-Ecks. Das heißt, D_n wird von der Drehung r um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und der Spiegelung s an einer Symmetrieachse des n-Ecks erzeugt. Als Gruppe von Matrizen ist D_n daher die Untergruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ erzeugt von

$$r = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \ s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Zeigen Sie, dass $r^n = 1$, $s^2 = 1$ und $srs = r^{-1}$ gelten. (Hierbei steht 1 für die Identitätsmatrix in der Gruppe der invertierbaren (2×2)-Matrizen über $\mathbb{R}$.)

(ii) Zeigen Sie, dass jedes Element aus D_n in der Form $r^i s^j$ mit $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und $j \in \{0, 1\}$ geschrieben werden kann. Folgern Sie hieraus, dass D_n die Ordnung $2n$ hat.

(iii) Bestimmen Sie die Kommutatorgruppe von D_n.
(Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen geradem und ungeradem n.)

(b) (i) Finden Sie alle Kompositionsreihen der Gruppen D_4 und D_5.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass D_n auflösbar ist.

Abgabe: Montag, den 20. Januar 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.