Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth
Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2024/2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra I*
Blatt 11

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Fertigen Sie für die freiwillige Zusatzaufgabe bitte einen separaten Aufschrieb an, notieren Sie auf diesem sowohl Ihren Namen als auch die Nummer Ihres Tutoriums, und werfen Sie diesen in den Briefkasten Nr. 17.

Blatt 12 wird das letzte Blatt sein, das vor Beginn der vorlesungsfreien Zeit in den Tutorien besprochen wird. Es wird jedoch noch ein freiwilliges Zusatzblatt (Blatt 13) geben, welches für die Vorbereitung auf die Klausur hilfreich ist. Blatt 13 wird weder korrigiert noch besprochen.

Aufgabe 11.1. (Normalität und Index) (2+2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und sei $H \leq G$.

(a) Setze $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Zeigen Sie:

  (i) $N \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq H$.

  (ii) Für jedes $M \trianglelefteq G$ mit $M \leq H$ gilt $M \leq N$.

(b) Setze $n = [G : H]$.

  (i) Angenommen $n = 2$. Zeigen Sie, dass H normal in G ist.

  (ii) Zeigen Sie, dass die Folgerung aus (i) für den Fall $n = 3$ im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 11.2. (Sylow-Untergruppen & Normalität) (2+2 Punkte)

(a) Sei G eine endliche Gruppe, sei p eine Primzahl und sei $H \leq G$ eine Sylow-p-Untergruppe. Bezeichne ferner mit ν_p die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen von G.

  (i) Zeigen Sie, dass die konjugierte Untergruppe gHg^{-1} für jedes $g \in G$ wieder eine Sylow-p-Untergruppe ist.

  (ii) Folgern Sie, dass H normal ist, wenn $\nu_p = 1$ gilt. D.h. eindeutige Sylow-Untergruppen sind stets normal.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung 5 oder 7 besitzt.

Aufgabe 11.3. (Zentrum) (2+2 Punkte)

Seien $p, k \in \mathbb{N}$ mit p prim und sei G eine Gruppe der Ordnung p^k.

(i) Zeigen Sie, dass das Zentrum C_G von G nicht-trivial ist.

(ii) Sei nun $k = 2$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Sylow-Untergruppen) (2+2 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie für die Fälle $n = 200$ und $n = 462$, dass G nicht einfach ist.

(b) Seien p, q und r Primzahlen mit $p < q < r$ und sei G eine Gruppe mit $|G| = pqr$. Zeigen Sie, dass G für ein $s \in \{p, q, r\}$ eine normale Sylow-s-Untergruppe besitzt.

Abgabe: Montag, den 27. Januar 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Ihre*r Tutor*in auf F4 bzw. in den separaten Briefkasten für die freiwillige Zusatzaufgabe (Nr. 17). Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen, und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihre*r Tutor*in.